Logika

Logika — rachunek zdań

Materiały pomocnicze do wykładu dla Studentów

Informatyki

Wydział EAIiIB AGH

Antoni Ligęza

Materiały pomocnicze:

`http://home.agh.edu.pl/~ligeza`

Logiczna konsekwencja — podstawowe problemy logiki

Definicja 1 **Logiczna konsekwencja** *Formuła ψ jest logiczną konsekwencją formuły ϕ wtw. gdy dla każdej interpretacji I zachodzi*

$$\text{jeżeli} \qquad \models_I \phi \qquad \text{to} \qquad \models_I \psi. \tag{1}$$

Podstawowe problemy logiki:

- dowodzenie twierdzeń — badanie logicznej konsekwencji:

$$\Delta \models H,$$

- badanie spełnialności (SAT):

$$\text{Czy istnieje interpretacja } I: \ \models_I \Psi$$

- weryfikacja tautologii:

$$\text{Czy dla każdej interpretacji } I: \ \models_I \Psi$$

Dwa alternatywne podejścia:

- analiza możliwych interprtacji — metoda zero-jedynkowa; problem — eksplozja kombinatoryczna[1],
- wnioskowanie logiczne — wywód — za pomoca reguł logicznych zachowujących logiczną konsekwencję.

Notacja: jeżeli formuła H jest wywodliwa (wyprowadzalna) ze zbioru Δ, to zapiszemu to jako:

$$\Delta \vdash H$$

Problemy konstrukcji systemów logicznych:

$$\Delta \vdash H \qquad \text{versus} \qquad \Delta \models H$$

[1] Redukcja: drzewa decyzyjne, grafy OBDD, tablice semantyczne

Metoda zero-jedynkowa: przykład: sprawdzanie tautologii

$$\phi = ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r).$$

Mamy (2^3) możliwych interpretacji.

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	Φ
0	0	0	1	1	**1**	**1**	**1**
0	0	1	1	1	**1**	**1**	**1**
0	1	0	1	0	**0**	**0**	**1**
0	1	1	1	1	**1**	**1**	**1**
1	0	0	0	1	**0**	**0**	**1**
1	0	1	1	1	**1**	**1**	**1**
1	1	0	0	0	**0**	**0**	**1**
1	1	1	1	1	**1**	**1**	**1**

Inna możliwość — przekształcenia równoważne:

$$\phi \equiv ((\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)) \Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \vee r).$$

$$\phi \equiv ((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \vee r).$$

$$\phi \equiv (\neg(p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \vee r).$$

Kładąc: $\psi = (\neg(p \vee q) \vee r)$ widzimy, że analizowana formuła jest postaci:

$$\phi \equiv \psi \Leftrightarrow \psi,$$

Metoda zero-jedynkowa: przykład: badanie logicznej konsekwencji

$$\frac{(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)}{(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)}$$

Kładąc:

$$\phi = (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$$

oraz

$$\varphi = (p \vee r) \Rightarrow (q \vee s),$$

należy sprawdzić czy:

$$\phi \models \varphi. \tag{2}$$

p	q	r	s	$p \Rightarrow q$	$r \Rightarrow s$	$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$	$p \vee r$	$q \vee s$	$(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$
0	0	0	0	1	1	**1**	0	0	**1**
0	0	0	1	1	1	**1**	0	1	**1**
0	0	1	0	1	0	**0**	1	0	**0**
0	0	1	1	1	1	**1**	1	1	**1**
0	1	0	0	1	1	**1**	0	1	**1**
0	1	0	1	1	1	**1**	0	1	**1**
0	1	1	0	1	0	**0**	1	1	**1**
0	1	1	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	0	0	0	0	1	**0**	1	0	**0**
1	0	0	1	0	1	**0**	1	1	**1**
1	0	1	0	0	0	**0**	1	0	**0**
1	0	1	1	0	1	**0**	1	1	**1**
1	1	0	0	1	1	**1**	1	1	**1**
1	1	0	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	1	1	0	1	0	**0**	1	1	**1**
1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	**1**

Z analizy kolumn 7 i 10 wynika, że zachodzi relacja logicznej konsekwencji (brak logicznej równoważności — 7, 10, 12 i 15).

Twierdzenia o dedukcji

Twierdzenie 1 *Jeżeli* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ *są formułami logicznymi (nazywanymi aksjomatami), formuła* Ω *(nazywana hipotezą lub konkluzją) jest ich logiczną konsekwencją wtw. gdy formuła* $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \Rightarrow \Omega$ *jest tautologią.*

Twierdzenie 2 *Jeżeli* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ *są formułami logicznymi (nazywanymi aksjomatami), formuła* Ω *(nazywana hipotezą lub konkluzją) jest ich logiczną konsekwencją wtw. gdy formuła* $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \wedge \neg\Omega$ *jest sprzeczna.*

Problem dowodzenia twierdzeń ma postać: mając dane aksjomaty $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ uznane za prawdziwe wykazać prawdziwość hipotezy Ω. Tak więc należy wykazać, że:

$$\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \models \Omega$$

Metody dododzenia twierdzeń:

- sprawdzanie wszystkich możliwych interpretacji (wada: duża złożoność obliczeniowa),
- dowód wprost – korzystając z aksjomatów i reguł dowodzenia generujemy nowe formuły aż do uzyskania formuły Ω,
- dowodzenie tautologii – korzystając z Tw.1 dowodzimy, że formuła $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \Rightarrow \Omega$ jest tautologią,
- dowód nie wprost – to dowód twierdzenia przeciwstawnego, równoważnego danemu. Polega na dowodzeniu twierdzenia postaci $\neg\Omega \Rightarrow \neg(\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n)$.
- dowód przez sprowadzenie do sprzeczności; korzystają z Tw.2, polega na wykazaniu sprzeczności formuły: $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \wedge \neg\Omega$.

Metoda rezolucji

1. Problem:
$$\Delta \models H$$
2. Z twierdzenia o dedukcji (2) — należy wykazać, że
$$\Delta \cup \neg H$$
jest niespełnialny.
3. Dokonać transformacji $\Delta \cup \neg H$ do postaci CNF.
4. Wykorzystując regułę rezolucji wyprowadzić zdanie puste - zawsze fałszywe.

Przykład:

1. Problem:
$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \models (p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$$
2. Z twierdzenia o dedukcji (2) — należy wykazać, że
$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \cup \neg[(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)]$$
jest niespełnialny.
3. Dokonać transformacji do postaci CNF. Mamy:
$$\{\neg p \vee q, \neg r \vee s, p \vee r, \neg q, \neg s\}$$
4. Wykorzystując regułę rezolucji wyprowadzić zdanie puste - zawsze fałszywe.

Metoda rezolucji dualnej

1. Problem:
$$\Delta \models H$$
2. Z twierdzenia o dedukcji (1) — należy wykazać, że
$$\Delta \Rightarrow H$$
jest tautologią.
3. Dokonać transformacji $\Delta \Rightarrow H$ do postaci DNF.
4. Wykorzystując regułę rezolucji dualnej wyprowadzić zdanie puste - zawsze zawsze prawdziwe.

Przykład:

1. Problem:
$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \models (p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$$
2. Z twierdzenia o dedukcji (1) — należy wykazać, że
$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)]$$
jest tautologią.
3. Dokonać transformacji do postaci DNF. Mamy:
$$\{p \wedge \neg q, r \wedge \neg s, \neg p \wedge \neg r, q, s\}$$
4. Wykorzystując regułę rezolucji dualnej wyprowadzić zdanie puste - zawsze prawdziwe.

Krok wnioskowania, wywód

Krok wnioskowania: jednokrotne zastosowanie dowolnej reguły wnioskowania w celu produkcji konkluzji.

Przykład:

Zastosowanie reguły rezolucji:

$$\frac{\phi \vee \neg p, p \vee \psi}{\phi \vee \psi}$$

Piszemy: $\{\phi \vee \neg p, p \vee \psi\} \vdash_R \phi \vee \psi$

Definicja 2 Wywód *Wywodem formuły ϕ ze zbioru formuł Δ nazwywamy ciąg formuł*

$$\phi_1, \phi_2 \dots \phi_k$$

taki, że:

- *formuła ϕ_1 jest wyprowadzalna z Δ (w pojedynczym kroku wnioskowania):*

  $$\Delta \vdash \phi_1,$$

- *każda następna formuła jest wyprowadzalna ze zbioru Δ i uprzednio wygenerowanych formuł (w pojedynczym kroku wnioskowania):*

  $$\{\Delta, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i\} \vdash \phi_{i+1}$$

  dla $i = 2, 3, \dots, k-1$,

- *ϕ jest ostatnią formułą wygenerowanego ciągu, tzn.:*

  $$\phi = \phi_k$$

Piszemy: $\Delta \vdash \phi$, a formułę ϕ nazywamy wywodliwą z Δ.

Zbiór logicznych konsekwencji

Definicja 3 *Niech Δ będzie zbiorem formuł (koniunkcją). Zbiorem logicznych konsekwencji nazywamy zbiór*

$$Cn(\Delta) = \{\phi \colon \Delta \models \phi\}$$

gdzie każda formuła ϕ jest zbudowana jedynie w oparciu o symbole propozycjonalne Δ.

Lemat 1 Własności zbioru konsekwencji *Zbiór logicznych konsekwencji $Cn(\Delta)$ ma następujące własności:*

- $\Delta \subseteq Cn(\Delta)$,
- *monotoniczność — jeżeli $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$, to:*

$$Cn(\Delta_1) \subseteq Cn(\Delta_2)$$

- $Cn(Cn(\Delta)) = Cn(\Delta)$ *(punkt stały).*

Czy tak okreslony punkt stały jest (i) okreslony jednoznacznie ? (ii) skończony ?

Przykład: Dany jest zbiór formuł

$$\Delta = \{\neg(\neg p \wedge \neg r), r \Rightarrow q, \neg q, p \Rightarrow t, \neg(t \wedge \neg s)\}$$

Wykazać, że:

$$\Delta \models s$$

Metoda tablic semantycznych

Przypomnienie: atom, literał, literał pozytywny, literał negatywny, para literałów komplementarnych $\{p, \neg p\}$.

Formuła $p \wedge \neg p$ jest zawsze fałszywa. Formuła $p \vee \neg p$ jest zawsze prawdziwa.

Założenia metody tablic semantycznych:

- badamy spełnialność formuły,
- punktem startowym jest formuła w oryginalnej postaci! (nie sprowadzamy do CNF/DNF),
- analizując strukturę formuły systematycznie szukamy modelu — jego brak oznacza niespełnialność,
- do analizy tworzymy drzewo struktury (lub tablicę):
  - dla formuł koniunktywnych tworzymy (liniowo) zbiory literałów,
  - dla formuł dysjunktywnych tworzymy rozgałęzienia,
- wystąpienie pary literałów komplementarnych zamyka daną gałąź (falsyfikacja),
- brak takiej pary — dostarcza modelu (spełnialność),
- zamknięcie każdej gałęzi falsyfikacją oznacza brak modelu (niespełnialność formuły wyjściowej).

Przykład 1:

$$p \wedge (\neg q \vee \neg p)$$

Przykład 2:

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$

Przykłady

Przykład 1:

$$p \wedge (\neg q \vee \neg p)$$

$$p, \neg q \vee \neg p$$

$$p, \neg q \qquad\qquad p, \neg p$$

Przykład 2:

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$

$$p \vee q, \neg p \wedge \neg q$$

$$p \vee q, \neg p, \neg q$$

$$p, \neg p, \ \neg q \qquad\qquad q, \neg p, \neg q$$

Algorytm tablic semantycznych

Reguły przekształceń dla formuł koniunktywnych (typu α):

α	α_1	α_2
$\neg\neg A$	A	
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \Rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$A_1 \Leftrightarrow A_2$	$A_1 \Rightarrow A_2$	$A_2 \Rightarrow A_1$

Reguły przekształceń dla formuł dysjunktywnych (typu β):

β	β_1	β_2
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \Rightarrow B_2)$	$\neg B_1$	B_2
$\neg(B_1 \Leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \Rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \Rightarrow B_1)$

Algorytm tworzenia drzewa:

- Korzeń: formuła wyjściowa,
- U (dla liścia) zawiera same literały:
  - $p, \neg p \in U$ — stop/falsyfikacja; *else*
  - stop/zdefiniowano model,
- Dla formuły koniunktywnej $\alpha \in U$:

$$U' = (U - \{\alpha\}) \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$$

- Dla formuły dysjunktywnej $\beta \in U$ mamy rozgałęzienie:

$$U' = (U - \{\beta\}) \cup \{\beta_1\}$$

$$U'' = (U - \{\beta\}) \cup \{\beta_2\}$$

Przykład:

1. Problem:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \models (p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$$

2. Z twierdzenia o dedukcji (2) — należy wykazać, że

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \cup \neg[(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)]$$

   jest niespełnialny.

3. *Dokonać transformacji do postaci CNF. Mamy:*

$$\{\neg p \vee q, \neg r \vee s, p \vee r, \neg q, \neg s\}$$

4. *Wykorzystując regułę rezolucji wyprowadzić zdanie puste - zawsze fałszywe.*

Problem: wykazać, że poniższa fromuła jest niespełnialna:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \cup \neg[(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)]$$

System Gentzena

Definicja 4 *System Gentzenowski jest systemem dowodzenia, w którym aksjomatami są zbiory formuł zawierające pary literałów komplementarnych (zdania prawdziwe), oraz dostępne są nastepujące reguły (schematy) dowodzenia:*

$$\frac{U \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}}{U \cup \{\alpha\}}$$

$$\frac{U_1 \cup \{\beta_1\}, \quad U_2 \cup \{\beta_2\}}{U_1 \cup U_2 \cup \{\beta\}}$$

α_1	α_2	α
A_1		$\neg\neg A_1$
$\neg A_1$	$\neg A_2$	$\neg(A_1 \land A_2)$
A_1	A_2	$A_1 \lor A_2$
$\neg A_1$	A_2	$A_1 \Rightarrow A_2$
$\neg(A_1 \Rightarrow A_2)$	$\neg(A_2 \Rightarrow A_1)$	$\neg(A_1 \Leftrightarrow A_2)$

β_1	β_2	β
B_1	B_2	$B_1 \land B_2$
$\neg B_1$	$\neg B_2$	$\neg(B_1 \lor B_2)$
B_1	$\neg B_2$	$\neg(B_1 \Rightarrow B_2)$
$B_1 \Rightarrow B_2$	$B_2 \Rightarrow B_1$	$B_1 \Leftrightarrow B_2$

Zbiór formuł postaci $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ — stanowi dysjunkcję.

Dowód w stylu Gentzena - przykład

Zadanie:

$$\vdash (p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$$

Przykład - tablice semantyczne:

$$\neg[(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)]$$

$$p \vee q, \neg(p \vee q)$$

$$p \vee q, \neg p, \neg q$$

$$p, \neg p, \ \neg q \qquad\qquad q, \neg p, \neg q$$

Przykład - Gentzen:

$$p, \neg p, \ q \qquad\qquad q, p, \neg q$$

$$\neg(p \vee q), p, q$$

$$\neg(p \vee q), (p \vee q)$$

$$(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$$

Dowody konstruktywne: Ważniejsze reguły wnioskowania (Fitch)

- AND Introduction (AI):

$$\frac{\phi_1, \ldots, \phi_n}{\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n}$$

- AND Elimination (AE):

$$\frac{\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n}{\phi_i}$$

- OR Introduction (OI):

$$\frac{\phi_i}{\phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n}$$

- OR Elimination (OE):

$$\frac{\phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n, \phi_1 \Rightarrow \psi, \ldots \phi_n \Rightarrow \psi}{\psi}$$

- Negation Introduction (NI):

$$\frac{\phi \Rightarrow \psi, \phi \Rightarrow \neg\psi}{\neg\phi}$$

- Negation Elimination (NE):

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}$$

- Implication Introduction (II):

$$\frac{\phi \vdash \psi}{\phi \Rightarrow \psi}$$

- Implication Elimination (IE):

$$\frac{\phi, \phi \Rightarrow \psi}{\psi}$$

- Equivalence Introduction (EI),
- Equivalence Elimination (EE)

Rozwiązywanie problemów — Badanie spełnialności — SAT

Definicja 5 **Spełnialność** *Formuła Ψ jest spełnialna, wtw. gdy istnieje intepretacja I, przy której Ψ jest prawdziwa:*

$$\models_I \Psi$$

Podstawowe problemy spełnialności:

- SAT — czy formuła jest spełnialna?
- liczba interpretacji spełniających — ile interpretacji spełnia formułę?
- znaleźć jedną/pierwszą interpretację spełniającą — zadanie konstruktywne.
- znaleźć alternatywne/wszystkie interpretacje spełniające — zadanie szukania.
- alternatywnie — udowodnić niespełnialność;
- w przypadku niespełnialności: maksymalne spełnialne podzbiory.

Dwa alternatywne podejścia:

- analiza możliwych interprtacji — metoda zero-jedynkowa; problem — eksplozja kombinatoryczna[2],
- wnioskowanie logiczne — wywód — za pomoc reguł logicznych zachowujących logiczną konsekwencję.

[2]Redukcja: drzewa decyzyjne, grafy OBDD, tablice semantyczne; SAT tools

Ewaluacja formuły — metoda zero-jedynkowa

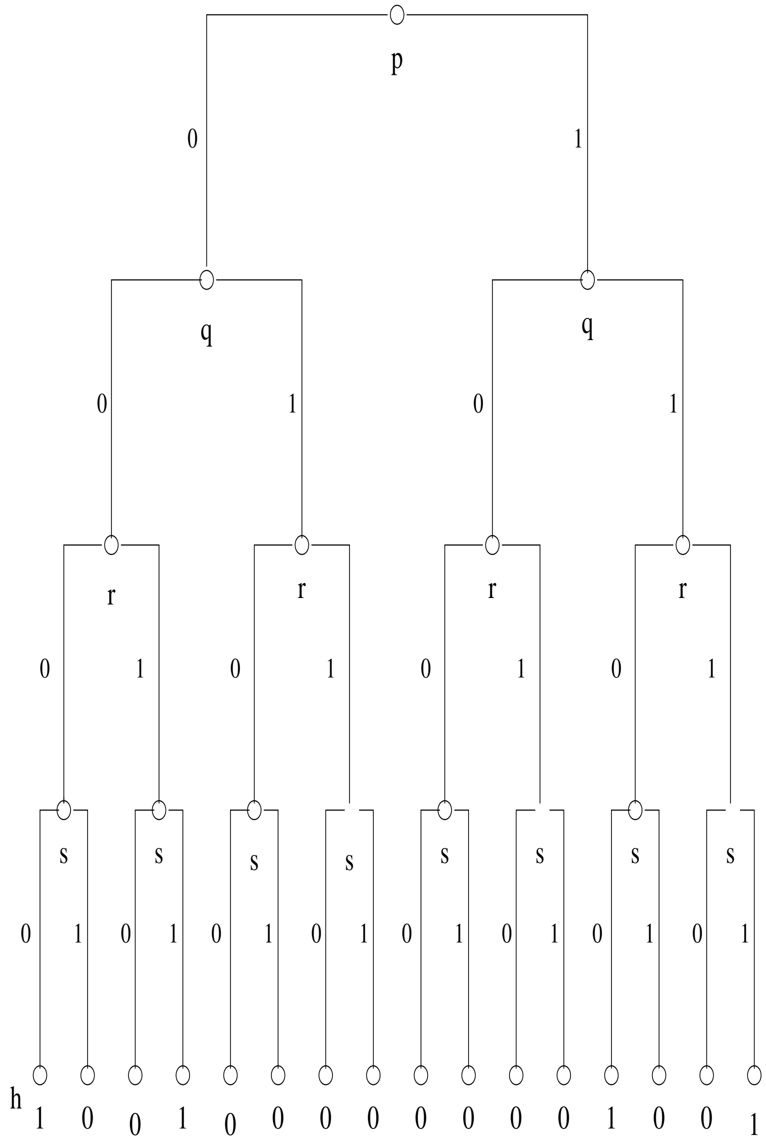
Badamy spełnialność formuły:

$$h \quad \equiv \quad (p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow s)$$

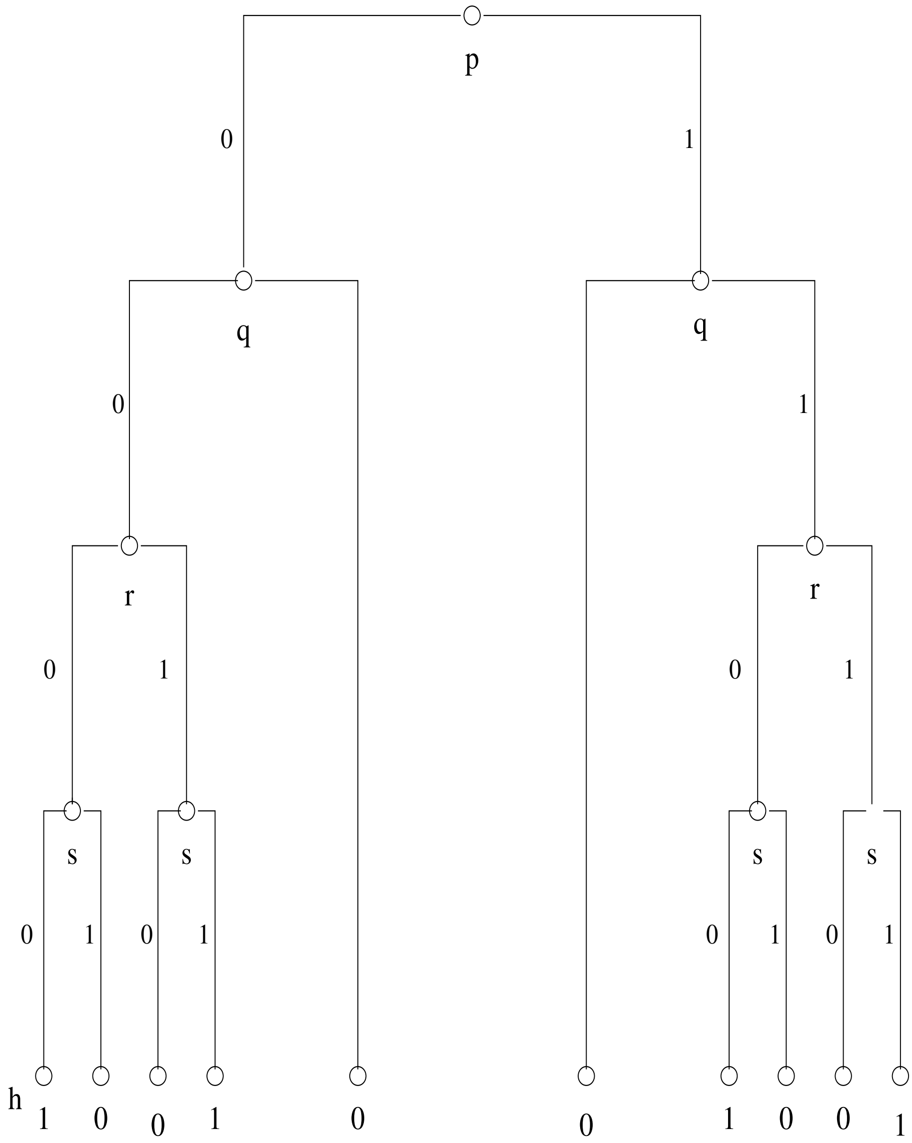
$RuleNo$	p	q	r	s	h
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

(3)

Drzewo binarne — uniwersalne narzędzie analizy formuł



Drzewo zredukowane



SAT: Backtracking Search and Reduction

Example:

$$\{p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee q, \neg p \vee \neg q \vee \neg r, \neg p \vee r\}$$

The analysis can be performed with decision tree and backracking search (DFS).

Example after reduction for $p = 1$:

$$\{q, \neg q \vee \neg r, r\}$$

Example after reduction for $p = 0$:

$$\{q, \neg q\}$$

Unit Propagation Rule: If q is a single literal in S, then one can remove q from S and apply reduction to all elements of S by replacing all occurences of q with 1 (for positive occurrence) and by 0 (for negative occurrence).

Ordered Binary Decision Diagrams (OBDD)

Notacja:

$$p \longrightarrow h_0, h_1$$

oznacza:

$$if\ p\ then\ h_0\ else\ h_1.$$

Definicja 6 *Reguła ekspansji Shannona*

$$\phi \equiv p \longrightarrow \phi\{p/1\}, \phi\{p/0\},$$

Przykład:

$$p \wedge q \equiv p \longrightarrow q, 0,$$

$$p \vee q \equiv p \longrightarrow 1, q$$

$$\neg p \equiv p \longrightarrow 0, 1.$$

Redukcja formuły

$$\phi = (p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow s).$$

$$\begin{aligned}
\phi &\equiv p \longrightarrow \phi_1, \phi_0 && (4)\\
\phi_1 &\equiv q \longrightarrow \phi_{11}, 0 && (5)\\
\phi_0 &\equiv q \longrightarrow 0, \phi_{00} && (6)\\
\phi_{11} &\equiv r \longrightarrow \phi_{111}, \phi_{110} && (7)\\
\phi_{00} &\equiv r \longrightarrow \phi_{001}, \phi_{000} && (8)\\
\phi_{111} &\equiv s \longrightarrow 1, 0 && (9)\\
\phi_{110} &\equiv s \longrightarrow 0, 1 && (10)\\
\phi_{001} &\equiv s \longrightarrow 1, 0 && (11)\\
\phi_{000} &\equiv s \longrightarrow 0, 1 && (12)\\
& && (13)
\end{aligned}$$

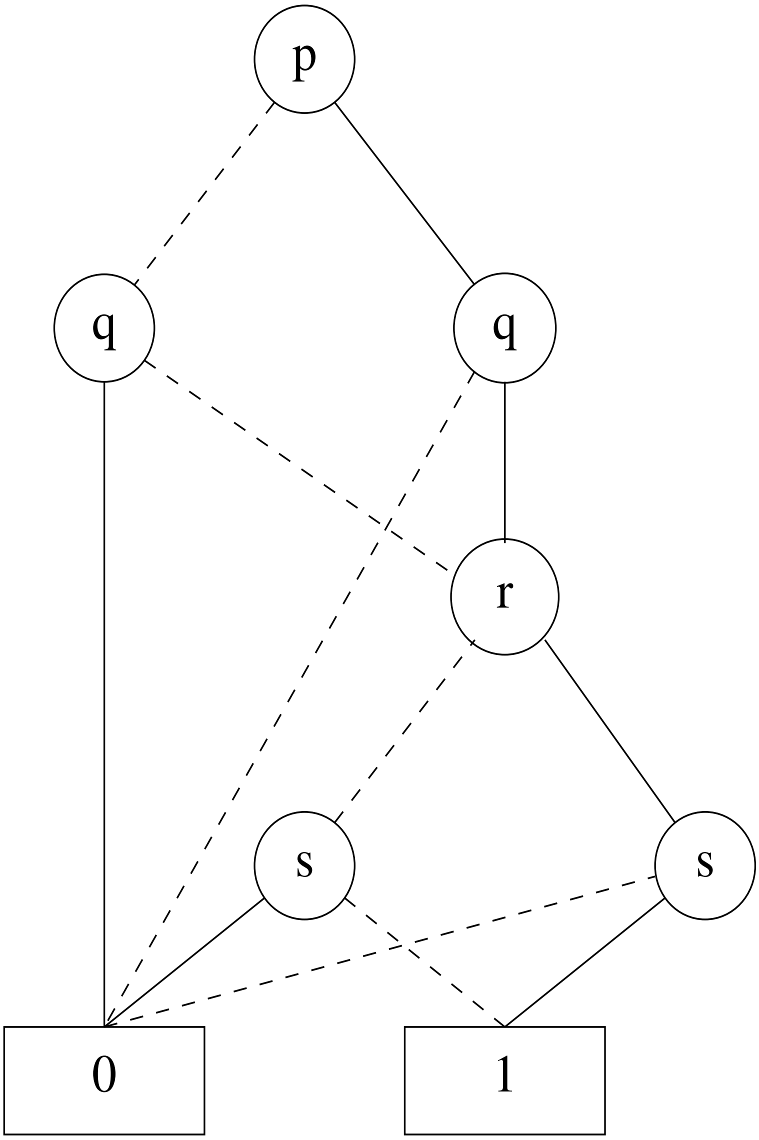
Redukcja po wykryciu powtarzających się drzew (podgrafów)

$$\begin{aligned}
\phi &\equiv p \longrightarrow \phi_1, \phi_0 && (14)\\
\phi_1 &\equiv q \longrightarrow \phi_{11}, 0 && (15)\\
\phi_0 &\equiv q \longrightarrow 0, \phi_{00} && (16)\\
\phi_{11} &\equiv r \longrightarrow \phi_{111}, \phi_{110} && (17)\\
\phi_{00} &\equiv r \longrightarrow \phi_{001}, \phi_{000} && (18)\\
\phi_{111} &\equiv s \longrightarrow 1, 0 && (19)\\
\phi_{110} &\equiv s \longrightarrow 0, 1 && (20)\\
\phi_{001} &\equiv s \longrightarrow 1, 0 && (21)\\
\phi_{000} &\equiv s \longrightarrow 0, 1 && (22)\\
& && (23)
\end{aligned}$$

przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
\phi &\equiv p \longrightarrow \phi_1, \phi_0 && (24)\\
\phi_1 &\equiv q \longrightarrow \phi_{11}, 0 && (25)\\
\phi_0 &\equiv q \longrightarrow 0, \phi_{11} && (26)\\
\phi_{11} &\equiv r \longrightarrow \phi_{111}, \phi_{110} && (27)\\
\phi_{111} &\equiv s \longrightarrow 1, 0 && (28)\\
\phi_{110} &\equiv s \longrightarrow 0, 1 && (29)\\
& && (30)
\end{aligned}$$

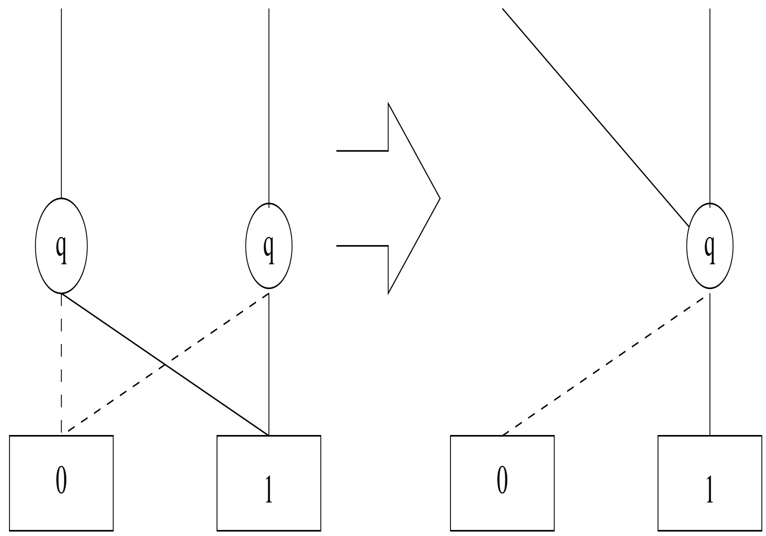
Zredukowany OBDD



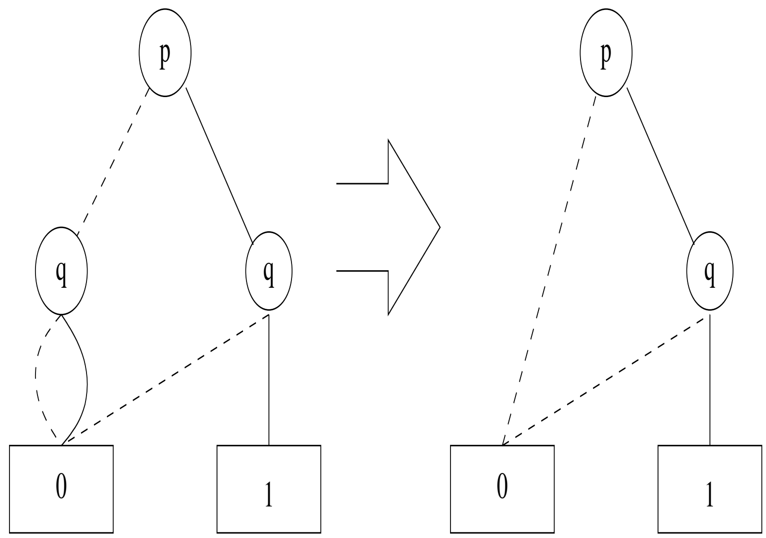
Co umożliwia analiza OBDD???

Metody redukcji

Metoda redukcji: sklejanie



Metoda redukcji: eliminacja nieistotnego węzła



SAT by Example: Unicorn

Given the following Knowledge Base (KB):

- If the unicorn is mythical, then it is immortal
- If the unicorn is not mythical, then it is a mortal mammal
- If the unicorn is either immortal or a mammal, then it is horned
- The unicorn is magical if it is horned

answer the following questions:

- Is the unicorn mythical? (M)
- Is it magical? (G)
- Is it horned? (H)

In terms of logic:

$$\mathrm{KB} \models G, H, M$$

$$\mathrm{KB} \vdash G, H, M$$

Unicorn - Logical Model

Definition of propositional variables:

- M: The unicorn is mythical
- I: The unicorn is immortal
- L: The unicorn is mammal
- H: The unicorn is horned
- G: The unicorn is magical

Building a **Logical Model** for the uzzle:

- If the unicorn is mythical, then it is immortal:

$$M \longrightarrow I$$

- If the unicorn is not mythical, then it is a mortal mammal:

$$\neg M \longrightarrow (\neg I \wedge L)$$

- If the unicorn is either immortal or a mammal, then it is horned:

$$(I \vee L) \longrightarrow H$$

- The unicorn is magical if it is horned:

$$H \longrightarrow G$$

Resulting Boolean formula (the Knowledge Base):

$$(M \longrightarrow I) \wedge (\neg M \longrightarrow (\neg I \wedge L)) \wedge ((I \vee L) \longrightarrow H) \wedge (H \longrightarrow G)$$

A Solution

$$(M \longrightarrow I) \equiv (\neg M \vee I)$$

$$(\neg M \longrightarrow (\neg I \wedge L)) \equiv (M \vee (\neg I \wedge L))$$

$$(M \vee (\neg I \wedge L)) \equiv ((M \vee \neg I) \wedge (M \vee L))$$

$$\frac{\neg M \vee I, M \vee L}{I \vee L}$$

$$\frac{I \vee L, (I \vee L) \longrightarrow H}{H}$$

$$\frac{H, H \longrightarrow G}{G}$$

So we have:

$$\mathrm{KB} \vdash H \wedge G$$

Questions:

- What about M (mythical), I (immortal) and L (mammal)?
- What combinations are admissible?
- How many models do we have?

SAT: Transformation to CNF and Encoding

Introducing enumeration:

1. M: The unicorn is mythical
2. I: The unicorn is immortal
3. L: The unicorn is mammal
4. H: The unicorn is horned
5. G: The unicorn is magical

Building a **Logical Model** for the uzzle:

- If the unicorn is mythical, then it is immortal:

$$M \longrightarrow I$$

- If the unicorn is not mythical, then it is a mortal mammal:

$$\neg M \longrightarrow (\neg I \wedge L)$$

- If the unicorn is either immortal or a mammal, then it is horned:

$$(I \vee L) \longrightarrow H$$

- The unicorn is magical if it is horned:

$$H \longrightarrow G$$

CNF and Encoded File

Resulting CNF:

$$\{\neg M \vee I, M \vee \neg I, M \vee L, \neg I \vee H, \neg L \vee H, \neg H \vee G\}$$

```
-1  2
 1 -2
 1      3
   -2       4
       -3   4
           -4    5
```

Input file in the DIMACS format:

```
p cnf 5 6
-1 2 0
1 -2 0
1 3 0
-2 4 0
-3 4 0
-4 5 0
```

Using Minisat

Page: `http://minisat.se/`

Online: `http://www.msoos.org/2013/09/minisat-in-your-browser/`

Manual: `http://www.dwheeler.com/essays/minisat-user-guide.html`

How to get ALL solutions?

Extra problem

Assumptions:

A1. There are 3 houses in a row

A2. The houses are numbered 1, 2 and 3, from left to right

A3. Each house has one of the colors Blue, Green or White

A4. Each house is inhabited by one person with one of the nationalities: Dutch, German and Italian

A5. Each person drinks (exactly one) of the following beverages: Coffee, Tea and Water

Conditions (constraints):

C1 The third house is green

C2 There is one house between the house of the person drinking coffee and the blue house

C3 The person drinking water lives in the blue house

C4 The Italian lives to the left of the coffee drinking person

C5 The German lives in house two

Query:

Who lives in the 1st house? What does the Dutch drink?

Literatura

1. Mordechai Ben-Ari: Mathematical Logic for Computer Science (Logika matematyczna w informatyce). Springer-Verlag, London, 2001 (WN-T, Warszawa, 2005).
2. Kenneth A. Ross i Charles R. B. Wright: Discrete Mathematics (Matematyka dyskretna). WN PWN, 2013.
3. Antoni Ligęza: Logical Foundations for Rule-Based Systems. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Wydawnictwo AGH, Kraków, 2005.
4. Michael R. Genesereth, Nils J. Nilsson: Logical Foundations of Artificial Intelligence. Morgan Kaufmann Publishers, Inc., Los Altos, California, 1987.
5. Zbigniew Huzar: Elementy logiki dla informatyków. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2007.
6. Stuart Russell, Peter Norvig: Artificial Intelligence. A Modern Approach. Pearson, 2010.
7. Marek Wójcik: Zasada rezolucji. Metoda automatycznego wnioskowania. PWN, Warszawa, 1991.
8. C. L. Chang and R. C. T. Lee: Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving. Academic Press, 1973.
9. Ronald J. Brachman and Hector J. Levesque: Knowledge Representation and Reasoning. Morgan Kaufmann, 2004.
10. Frank van Harmelen, Vladimir Lifschitz, Bruce Porter (Eds.): *Handbook of Knowledge Representation*. Elsevier B.V., Amsterdam, 2008. `http://ii.fmph.uniba.sk/~sefranek/kri/handbook/`

Zasoby sieciowe. Kurs w Stanford

Kurs logiki on-line Stanford:

`https://www.coursera.org/course/intrologic`

1. Wikipedia-pl: `http://pl.wikipedia.org/wiki/Logika_matematyczna`
2. Wikipedia-en: `http://en.wikipedia.org/wiki/Logic`
3. AI-Lab-Prolog: `http://ai.ia.agh.edu.pl/wiki/pl:prolog:prolog_lab`
4. EIS-KRR: `http://ai.ia.agh.edu.pl/wiki/pl:dydaktyka:krr:start`
5. ALI-home: `home.agh.edu.pl/~ligeza`
6. David Poole and Allen Mackworth: Artificial Intelligence. Foundations of Computational Agents. `http://artint.info/`
7. Ulf Nilsson and Jan Maluszynski: Logic, Programming and Prolog. `http://www.ida.liu.se/~ulfni/lpp/`
8. Inês Lynce: Boolean SATisfiability. Materiały z kursu ACAI, Lille, October 2015.