Logika
Rachunek zdań

Materiały pomocnicze do wykładu

dla

Studentek i Studentów Informatyki
Wydziału EAIiIB AGH

Antoni Ligęza

Materiały pomocnicze:

http://home.agh.edu.pl/~ligeza

http://ai.ia.agh.edu.pl/wiki/

Title - this is a test only

Rysunek 1: Progress in Chess

Logika - próba definicji i pomocne narzędzia

Definicja 1 *Logika (logos — rozum, słowo) — nauka o sposobach jasnego i ścisłego formułowania myśli, o regułach poprawnego rozumowania i uzasadniania twierdzeń.*

Logika = (formalny zapis) + (mechaniczne przetwarzanie) wiedzy

Narzędzia:

- Formalizacja, język formalny:
  - składnia — zasady konstrukcji wyrażeń,
  - semantyka — zasady określania znaczenia; wartościowanie wyrażeń,
  - relacje — równoważność, wynikanie, spełnialność,...
  - transformacje — przekształcenia równoważne,
  - reguły wnioskowania — krok wnioskowania, wywód, dowód;
- wizualizacja zbiorów — diagramy Venna,
- tabele (przegląd wariantów),
- drzewa (systematyzacja przeglądu wariantów),
- diagramy (grafy; grafy AND-OR; schematy),
- modele formalne.

Przedmiot i zadania logiki

Przedmiotem logiki matematycznej są następujące zagadnienia:

- Modelowanie — formalna, symboliczna reprezentacja wiedzy; wiedza wyrażana pierwotnie w języku naturalnym jest zapisywana w postaci *formuł logicznych*,
- Transformacje — transformacja wiedzy do równoważnych postaci normalnych (CNF, DNF, NNF),
- MInimalizacja — minimalizacja reprezentacji (np. przy syntezie układów logicznych),
- Wnioskowanie — przetwarzanie wiedzy za pomocą reguł stanowiących schematy wnioskowania; w tym celu formułowane są *reguły wnioskowania*,
- Analiza — badanie własności generowanych wniosków i systemów logicznych; własności te obejmują m. in. *poprawność* i *zupełność*,
- Analiza systemów — analiza systemów opisywanych za pomocą logiki (baz wiedzy); badanie własności,
- Synteza systemów — synteza systemów definiowanych za pomocą logiki.

Klasyczna logika formalna bada mechanizmy rozumowań niezawodnych, w których otrzymywane wnioski są zawsze prawdziwe, o ile wychodzi się z prawdziwych przesłanek, a więc wnioskowania dedukcyjnego.

Czasem dopuszcza się również inne schematy wnioskowania, prowadzące do użytecznych, chociaż nie zawsze prawdziwych wniosków (np. abdukcja oraz indukcja).

Alfabet rachunku zdań

Alfabet rachunku zdań tworzą symbole formuł zdaniowych, łączących je spójników (funkcji) logicznych oraz stosowane dla uporządkowania notacji nawiasy.

Formuły zdaniowe symbolizują konkretne zdania; zdania te mogą być dobrze określone i wówczas można im przypisać ocenę *prawdy* albo *fałszu* lub też symbolizować pewne nieskonkretyzowane w danej chwili wypowiedzi.

W pierwszym przypadku, takie skończone wypowiedzi, którym można jednoznacznie przypisać ocenę *prawdy* albo *fałszu*, nazywane będą *zdaniami*. Mogą one być zapisywane jawnie, np. "Śnieg jest biały", "W nocy jest ciemno", "Pada deszcz", itp. lub też przy użyciu pewnych symboli, np. p czy q.

W drugim przypadku, formuła zdaniowa symbolizuje pewną bliżej nie sprecyzowaną wypowiedź, jednakże taką, której wartość logiczna może przyjąć wartość prawdy albo fałszu. W takim przypadku formuła zdaniowa nazywana jest zmienną zdaniową.

W przypadku zmiennych zdaniowych prowadzone rozumowanie nie jest powiązane z ich znaczeniem. Ważna jest tylko interpretacja logiczna, a więc przypisanie wartości prawdy albo fałszu; czasem wartość ta pozostaje nieokreślona[1].

Aby zmiennej zdaniowej przypisać konkretne znaczenie stosowana jest notacja:

$$p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \text{'Jest zimno'}.$$

[1]Klasyczna logika to logika dwuwartościowa; istnieją też logiki wielowartościowe

Alfabet rachunku zdań

Definicja 2 *Alfabet rachunku zdań:*

- P — *zbiór symboli propozycjonalnych (zmiennych logicznych),*

$$P = \{p, q, r, \ldots, p_1, q_1, r_1, \ldots, p_2, q_2, r_2, \ldots\},$$

- $\neg$ – *negacja,*
- $\wedge$ – *koniunkcja,*
- $\vee$ – *alternatywa,*
- $\Rightarrow$ – *implikacja (może być również postaci* $\Leftarrow$*),*
- $\Leftrightarrow$ – *równoważność (implikacja dwustronna),*
- *dwa symbole specjalne:*
  - $\top$ *(formuła zawsze prawdziwa) oraz*
  - $\bot$ *(formuła zawsze fałszywa),*
- *nawiasy.*

Istnieją różne warianty notacji spójników logicznych!

Przy wykorzystaniu powyższych spójników logicznych i symboli formuł zdaniowych (formuł atomowych) buduje się bardziej złożone formuły logiczne rachunku zdań. Nie wszystkie jednak możliwe do utworzenia napisy będą formułami. Poniżej podano definicję poprawnie skonstruowanych formuł.

Składnia rachunku zdań

Definicja 3 *Składnia — definicja formuł:*

- *symbole formuł specjalnych* $\top$ *i* $\bot$ *są formułami,*
- *każde* $p \in P$ *jest formułą (atomiczną),*
- *jeżeli* ϕ*,* ψ *są formułami, to:*
  - $\neg(\phi)$ *jest formułą (także* $\neg(\psi)$*),*
  - $(\phi \wedge \psi)$ *jest formułą,*
  - $(\phi \vee \psi)$ *jest formułą,*
  - $(\phi \Rightarrow \psi)$ *jest formułą,*
  - $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ *jest formułą,*
  - *nic innego nie jest formułą.*

Zbiór formuł określany jest symbolem $\mathbf{FOR}$. Zbiór wszystkich formuł jest nieskończony. W zastosowaniach praktycznych rozważamy skończone podzbiory tego zbioru.

Każda poprawnie skonstruowana formuła posiada jednoznacznie określone drzewo struktury. Liśćiami tego drzewa są formuły atomiczne.

Jak zbudować drzewo struktury? Analiza składniowa (parsowanie) formuł.

Formuły należące do zbioru $P \cup \{\top, \bot\}$ nazywane są formułami atomicznymi (atomami).

Formuły atomiczne i ich negacje to literały.

Hierarchia spójników — eliminacja nawiasów

Zakłada się następującą hierarchię spójników (priorytety; od najwyższego do najniższego):

- negacja ($\neg$),
- koniunkcja ($\wedge$),
- dysjunkcja ($\vee$),
- implikacja ($\Rightarrow$),
- równoważność ($\Leftrightarrow$).

Przyjęcie priorytetów pozwala eliminować nawiasy — z zachowaniem jednoznaczności interpretacji.

Semantyka rachunku zdań

Formułom atomicznym i złożonym przypisywana jest ocena prawdy lub fałszu. Aktualna ocena formuły zależy od przypisania wartości logicznych występującym w niej formułom atomowym oraz od konstrukcji samej formuły. Poniżej wprowadzono ważne pojęcie *interpretacji* formuł atomowych w rachunku zdań.

Definicja 4 *Niech P będzie zbiorem rozważanych symboli formuł atomowych a $\mathcal{T}$ wyróżnionym zbiorem wartości logicznych, tj. $\mathcal{T} = \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$. Interpretacja symboli zbioru P nazywa się każdą funkcję postaci:*

$$I\colon P \longrightarrow \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}. \tag{1}$$

przyporządkowującą każdemu symbolowi formuły atomowej wartość logiczną prawdy albo fałszu.

Interpretacja określa zatem czy dana formuła atomowa jest uznawana za prawdziwą czy też fałszywą. Przy danej interpretacji formuła może być prawdziwa lub fałszywa; w przypadku gdy interpretacja nie przypisywałaby jednoznacznie wartości logicznej prawdy albo fałszu wszystkim symbolom rozważanego zbioru, interpretację taką określa się jako niepełną lub częściową.

Pojęcie interpretacji rozszerzamy na zbiór formuł (jak???).

Notacja: $I(\phi) = \mathbf{T}$ zapisujemy $\models_I \phi$; $I(\phi) = \mathbf{F}$ zapisujemy $\not\models_I \phi$

Dla każdej formuły logicznej można zbudować tablicę prawdy.

Interpretacja — c.d.

Definicja 5 *Niech P oznacza zbiór rozważanych symboli formuł atomowych, $\mathcal{T} = \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ – dwuelementowy zbiór wartości logicznych, a I – dowolną interpretację. Interpretacja I przypisuje wartości logiczne wszystkim formułom ϕ, ψ, φ ze zbioru $\mathbf{FOR}$, tzn.:*

- $I(\top) = \mathbf{T}$ *($\models_I \top$),*
- $I(\bot) = \mathbf{F}$ *($\not\models_I \bot$),*
- $\models_I \neg\phi$ *wtw.* $\not\models_I \phi$*,*
- $\models_I \psi \wedge \varphi$ *wtw.* $\models_I \psi$ *oraz* $\models_I \varphi$*,*
- $\models_I \psi \vee \varphi$ *wtw.* $\models_I \psi$ *lub* $\models_I \varphi$*,*
- $\models_I \psi \Rightarrow \varphi$ *wtw.* $\models_I \varphi$ *lub* $\not\models_I \psi$*,*
- $\models_I \psi \Leftrightarrow \varphi$ *wtw.* $\models_I (\psi \Rightarrow \varphi)$ *oraz* $\models_I (\varphi \Rightarrow \psi)$*.*

Rozszerzenie pojęcia interpretacji na zbiór formuł pozwala określić wartość logiczną dowolnej poprawnie skonstruowanej formuły rachunku zdań.

Definicja 6 **Równoważność formuł** *Formuły ϕ oraz ψ nazywamy logicznie równoważnymi wtw. gdy dla każdej interpretacji I zachodzi*

$$\models_I \phi \qquad \text{wtw.} \qquad \models_I \psi. \tag{2}$$

Definicja 7 **Logiczna konsekwencja** *Formuły ψ jest logiczną konsekwencją formuły ϕ wtw. gdy dla każdej interpretacji I zachodzi*

$$\text{jeżeli} \qquad \models_I \phi \qquad \text{to} \qquad \models_I \psi. \tag{3}$$

Tabele prawdy

ϕ	$\neg\phi$
F	**T**
T	**F**

ϕ	φ	$\phi \wedge \varphi$
F	**F**	**F**
F	**T**	**F**
T	**F**	**F**
T	**T**	**T**

ϕ	φ	$\phi \vee \varphi$
F	**F**	**F**
F	**T**	**T**
T	**F**	**T**
T	**T**	**T**

ϕ	φ	$\phi \Rightarrow \varphi$
F	**F**	**T**
F	**T**	**T**
T	**F**	**F**
T	**T**	**T**

ϕ	φ	$\phi \Leftrightarrow \varphi$
F	**F**	**T**
F	**T**	**F**
T	**F**	**F**
T	**T**	**T**

Tabele zerojedynkowe prawdy

Zamiast symboli prawdy i fałszu często stosujemy zapis uproszczony: 1 zamiast prawdy i 0 zamiast fałszu. Tablica prawdy dla negacji przybiera postać:

p	$\neg p$
0	1
1	0

Tablica prawdy dla koniunkcji przybiera postać:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tablica prawdy dla dysjunkcji przybiera postać:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tablica prawdy dla implikacji przybiera postać:

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Definicje symboli spójników logicznych

Często podana powyżej definicja przedstawiana jest w formie jest tabeli ilustrującej podane zależności logiczne (patrz poniżej).

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\phi \wedge \psi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \Rightarrow \psi$	$\phi \Leftrightarrow \psi$
true	*true*	*false*	*true*	*true*	*true*	*true*
true	*false*	*false*	*false*	*true*	*false*	*false*
false	*true*	*true*	*false*	*true*	*true*	*false*
false	*false*	*true*	*false*	*false*	*true*	*true*

Semantykę wybranych funkcji można definiować za pomocą sprowadzenia jej do równoważnej formuły zawierającej symbole koniunkcji, dysjunkcji i negacji.

- $\phi \Rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$,
- $\phi \Leftrightarrow \psi \equiv (\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\phi \Leftarrow \psi)$,
- $\phi|\psi \equiv \neg(\phi \wedge \psi)$ – funkcja (kreska) Sheffera, jest to tzw. funkcja NAND; inna notacja $\overline{\phi \wedge \psi}$,
- $\phi \downarrow \psi \equiv \neg(\phi \vee \psi)$ – funkcja (strzałka) Pierce'a, jest to tzw. funkcja NOR; inna notacja $\overline{\phi \vee \psi}$,
- $\phi \bigoplus \psi \equiv (\neg\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \neg\psi)$ – funkcja alternatywy wykluczającej, jest to tzw. funkcja EX-OR,
- $\neg\phi \wedge \psi$ oraz $\phi \wedge \neg\psi$ – funkcje zakazu lub różnice niesymetryczne (negacja implikacji).

Ogólnie dla n argumentów wejściowych można skonstruować 2^{2^n} różnych funkcji, a więc dla $n = 2$ jest 16 różnych funkcji (dlaczego? jakich?).

Systemy funkcyjne funkcjonalnie pełne

Definicja 8 *System funkcyjny (zestaw funkcji/spójników logicznych) jest funkcjonalnie pełny, wtw. gdy przy pomocy tych spójników można zdefiniować wszystkie inne spójniki logiczne.*

Przykłady systemów funkcyjnych funkcjonalnie pełnych:

AND, OR, NOT:

$$\{\neg, \wedge, \vee\}$$

AND, NOT:

$$\{\neg, \wedge\}$$

OR, NOT:

$$\{\neg, \vee\}$$

IMPLIKACJA, NOT:

$$\{\neg, \Rightarrow\}$$

NAND:

$$\{|\}$$

NOR:

$$\{\downarrow\}$$

Definicja 9 *System funkcyjny funkcjonalnie pełny jest minimalny wtw. gdy nie można z niego usunąć żadnego spójnika bez utraty pełności funkcjonalnej. W przeciwnym przypadku jest to system nadmiarowy (redundantny).*

Dla wygody wykorzystuje się systemy nadmiarowe.

Ważniejsze prawa (równoważności) logiczne

- $\neg\neg\phi \equiv \phi$ — prawo (eliminacji) podwójnej negacji,
- $\phi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \phi$ — przemienność koniunkcji,
- $\phi \vee \psi \equiv \psi \vee \phi$ — przemienność dysjunkcji,
- $(\phi \wedge \varphi) \wedge \psi \equiv \phi \wedge (\varphi \wedge \psi)$ — łączność koniunkcji,
- $(\phi \vee \varphi) \vee \psi \equiv \phi \vee (\varphi \vee \psi)$ — łączność dysjunkcji,
- $(\phi \vee \varphi) \wedge \psi \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \psi)$ — rozdzielność koniunkcji względem dysjunkcji,
- $(\phi \wedge \varphi) \vee \psi \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \psi)$ — rozdzielność dysjunkcji względem koniunkcji,
- $\phi \wedge \phi \equiv \phi$ — idempotencja koniunkcji (pochłanianie),
- $\phi \vee \phi \equiv \phi$ — idempotencja dysjukcji (pochłanianie),
- $\phi \wedge \bot \equiv \bot$, $\phi \wedge \top \equiv \phi$ — prawo identyczności,
- $\phi \vee \bot \equiv \phi$, $\phi \vee \top \equiv \top$ — prawo identyczności,
- $\phi \vee \neg\phi \equiv \top$ — prawo wyłączonego środka,
- $\phi \wedge \neg\phi \equiv \bot$ — prawo sprzeczności,
- $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv \neg(\phi) \vee \neg(\psi)$ — prawo De Morgana,
- $\neg(\phi \vee \psi) \equiv \neg(\phi) \wedge \neg(\psi)$ — prawo De Morgana,
- $\phi \Rightarrow \psi \equiv \neg\psi \Rightarrow \neg\phi$ — prawo kontrapozycji,
- $\phi \Rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$ — zasada eliminacji implikacji.

Związki pomiędzy zdaniami logicznymi

Zdanie proste

$$p \Rightarrow q$$

Zdanie odwrotne

$$q \Rightarrow p$$

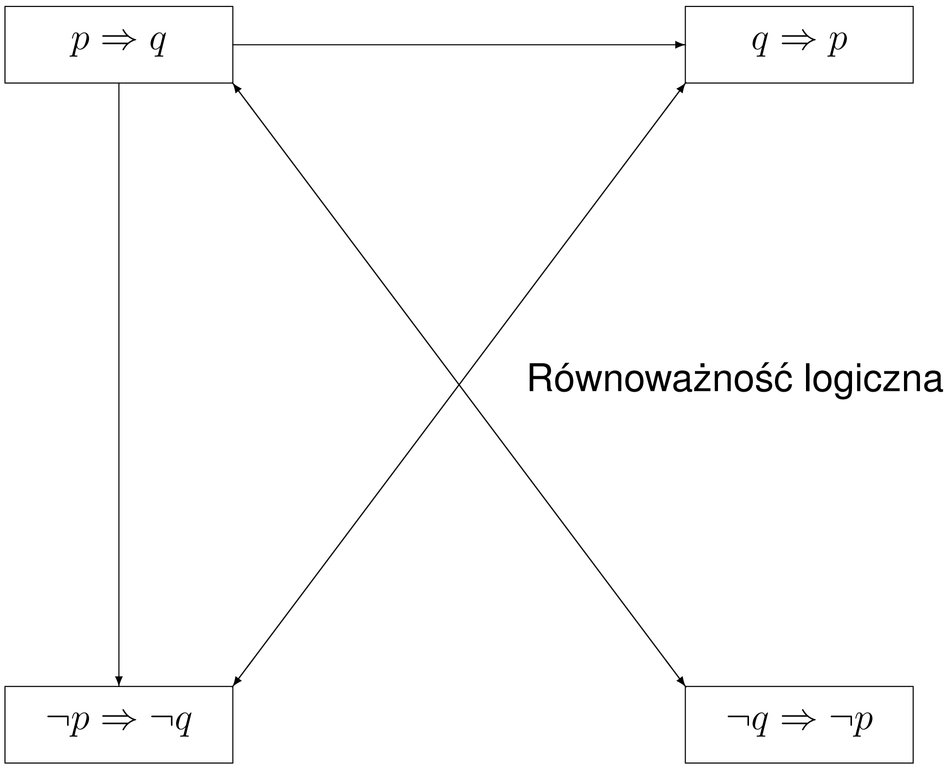
Zdanie przeciwne

$$\neg p \Rightarrow \neg q$$

Zdanie przeciwstawne

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

Kwadrat logiczny:



Wybrane problemy.
Symbole rachunku zdań a symbole metajęzyka.
Problem implikacji.

Symbole języka a symbole metajęzyka

Implikacja $\Rightarrow$ to spójnik logiczny. Jest funktorem tworzącym formułę. Jest elementem języka.

Symbol logicznej implikacji $\models$ jest symbolem relacji logicznej konsekwencji. Jest symbolem metajęzyka.

Podobnie $\Leftrightarrow$ oraz $\equiv$.

Implikacja

$$\phi \Rightarrow \psi$$

jest prawdziwa o ile nie zachodzi $\models_I\ \phi$ oraz $\not\models_I\ \psi$ (z prawdy nie może wynikać fałsz).

Ta implikacja pozostaje prawdziwa zawsze, o ile $\not\models_I\ \phi$ (z fałszu wynika wszystko).

Z prawdziwości ψ (następnika) nie można wnioskować (to częsty błąd) o prawdziwości ϕ (poprzednika)!

Z fałszywości ψ (następnika) można wnioskować o nieprawdziwości ϕ (poprzednika).

Przykład: sprawdzanie tautologii

$$\phi = ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r).$$

Mamy (2^3) możliwych interpretacji.

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	Φ
0	0	0	1	1	**1**	**1**	**1**
0	0	1	1	1	**1**	**1**	**1**
0	1	0	1	0	**0**	**0**	**1**
0	1	1	1	1	**1**	**1**	**1**
1	0	0	0	1	**0**	**0**	**1**
1	0	1	1	1	**1**	**1**	**1**
1	1	0	0	0	**0**	**0**	**1**
1	1	1	1	1	**1**	**1**	**1**

Inna możliwość — przekształcenia równoważne:

$$\phi \equiv ((\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)) \Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \vee r).$$

$$\phi \equiv ((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \vee r).$$

$$\phi \equiv (\neg(p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \vee r).$$

Kładąc: $\psi = (\neg(p \vee q) \vee r)$ widzimy, że analizowana formuła jest postaci:

$$\phi \equiv \psi \Leftrightarrow \psi,$$

Przykład: badanie logicznej konsekwencji

$$\frac{(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)}{(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)}$$

Kładąc:

$$\phi = (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$$

oraz

$$\varphi = (p \vee r) \Rightarrow (q \vee s),$$

należy sprawdzić czy:

$$\phi \models \varphi. \tag{4}$$

p	q	r	s	$p \Rightarrow q$	$r \Rightarrow s$	$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$	$p \vee r$	$q \vee s$	$(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$
0	0	0	0	1	1	**1**	0	0	**1**
0	0	0	1	1	1	**1**	0	1	**1**
0	0	1	0	1	0	**0**	1	0	**0**
0	0	1	1	1	1	**1**	1	1	**1**
0	1	0	0	1	1	**1**	0	1	**1**
0	1	0	1	1	1	**1**	0	1	**1**
0	1	1	0	1	0	**0**	1	1	**1**
0	1	1	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	0	0	0	0	1	**0**	1	0	**0**
1	0	0	1	0	1	**0**	1	1	**1**
1	0	1	0	0	0	**0**	1	0	**0**
1	0	1	1	0	1	**0**	1	1	**1**
1	1	0	0	1	1	**1**	1	1	**1**
1	1	0	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	1	1	0	1	0	**0**	1	1	**1**
1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	**1**

Z analizy kolumn 7 i 10 wynika, że zachodzi relacja logicznej konsekwencji (brak logicznej równoważności — 7, 10, 12 i 15).

Ujęcie aksjomatyczne KRZ

KRZ da się ująć 'zgrabnie' jako pewien zbiór aksjomatów i odpowiednich reguł wnioskowania. Jeśli aksjomatów jest kilka, a reguła jedna, mówimy, że mamy do czynienia z *Hilbertowskim systemem dowodzenia*.

Definicja 10 *System Hilbertowski H dla KRZ jest złożony z następujących trzech (schematów) aksjomatów:*

Aksjomat 1 $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow A))$.

Aksjomat 2 $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$.

Aksjomat 3 $\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$.

Regułą dowodzenia jest Modus Ponens, czyli reguła odrywania (MP), tzr. reguła o schemacie: $\frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash A}{\vdash B}$.

Twierdzenie 1 *(**Twierdzenie o dedukcji**). Reguła dedukcji* $\frac{T \bigcup \{A\} \vdash B}{T \vdash A \rightarrow B}$ *jest prawomocną (poprawną) regułą wnioskowania w KRZ.*

Dowód 1 *Dowód – indukcyjny ze względu na długość dowodu* $T \bigcup \{A\} \vdash B$*. Załóżmy, ża taki dowód ma długość* $n = 1$*. Oznacza to, że B udowodniono w jednym kroku, czyli* $B \in T \bigcup A$ *albo samo jest aksjomatem.*

- *Jeśli* $B = A$*, to dowód dla B jest konsekwencją tezy* $\vdash A \rightarrow A$*, czyli istotnie mamy* $T \vdash A \rightarrow B$*.*
- *Jeśli* $B \neq A$*, to dowodzimy tezy tak:*
  - $T \vdash B$ — *Założenie lub aksjomat*
  - $T \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$ — *Aksjomat 1*
  - $T \vdash A \rightarrow B$ — *Modus Ponens: 1,2.*

Ujęcie aksjomatyczne KRZ– c.d

Przejdzmy do kroku $n > 1$ (dowód ma długość $n > 1$). Wówczas B jest wywiedlne z $T \bigcup A$ przy użyciu reguły odrywania. Oznacza to, że istnieje formuła C, że jakiś i-ty krok dowodu jest postaci: $T \bigcup A \vdash C$, a j-ty ma postać: $T \bigcup A \vdash B \rightarrow C$, gdy $i < j < n$. Bardziej szczegółowo:

- $i.\ T \vdash A \rightarrow C$ Założenie indukcyjne
- $j\ .\ T \vdash A \rightarrow (C \rightarrow B)$ Założenie indukcyjne
- $j + 1.\ T \vdash (A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)))$ Aksjomat 2
- $j + 2.\ T \vdash (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)$ MP: $j, j + 1$
- $j + 3.\ T \vdash A \rightarrow B$ MP: $i, j + 2$

Lemat 1 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)]$.

Dowód 2 *1.* $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A\} \vdash A$ *Założenie*

2. $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A\} \vdash A \rightarrow B$ *Założenie*

3. $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A\} \vdash B \rightarrow C$ *Założenie*

4. $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A\} \vdash A \rightarrow B$ *MP: 1,2*

5. $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A\} \vdash C$ *MP: 3,4*

6. $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\} \vdash A \rightarrow C$ *Reguła dedukcji: 5*

7. $\{A \rightarrow B\} \vdash [(B \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow C]$ *Reguła dedukcji: 6*

8. $(A \rightarrow B) \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow C]$ *Reguła dedukcji: 7*

Twierdzenie o dedukcji-c.d

Lemat 2 $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$.

Dowód 3 *1.* $\{\neg A\} \vdash \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ *Aksjomat 1*

2. $\{\neg A\} \vdash \neg A$ *Założenie*

3. $\{\neg A\} \vdash \neg B \rightarrow \neg A$ *MP: 1,2*

4. $\{\neg A\} \vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ *Aksjomat 3*

5. $\{\neg A\} \vdash A \rightarrow B$ *MP: 3,4*

6. $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ *Reguła dedukcji: 5*

Twierdzenie o dedukcji w KRZ-ujęcie Hilbertowskie

Lemat 3 $\vdash [A \rightarrow (B \rightarrow C] \rightarrow [B \rightarrow (A \rightarrow C)]$.

Dowód 4

- $\{A \rightarrow (B \rightarrow C), B, A\} \vdash A$ *Założenie*
- $\{A \rightarrow (B \rightarrow C), B, A\} \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$ *Założenie*
- $\{A \rightarrow (B \rightarrow C), B, A\} \vdash (B \rightarrow C)$ *MP:1,2*
- $\{A \rightarrow (B \rightarrow C), B, A\} \vdash B$ *Założenie*
- $\{A \rightarrow (B \rightarrow C), B, A\} \vdash C$ *MP:3,4*
- $\{A \rightarrow (B \rightarrow C), B\} \vdash A \rightarrow C$ *Reguła dedukcji: 5*
- $\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$ *Reguła dedukcji: 6*
- $\vdash [A \rightarrow (B \rightarrow [(B \rightarrow C)] \rightarrow [B \rightarrow (A \rightarrow C)]$ *Reguła dedukcji: 7*

Twierdzenie o pełności

Lemat 4 *(**Lindenbauma-Assera**) Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuły A: jeśli $X \not\vdash A$ istnieje taki zbiór $L^A(X)$, zwany A-relatywnym nadzbiorem X, spełniający następujące warunki:*

1. $A \notin L^A(X)$
2. $X \subseteq L^A(X)$

Twierdzenie 2 ***(O pełności):*** *Każda teza KRZ jest tautologią ($\vdash A \iff \models A$).*

Dowód 5 *Ominiemy dowód, że każda teza jest tautologią. Można to sprawdzić dla każdego aksjomatu metodą zero-jedynkową i zauważyć, że MP zachowuje prawdziwość (prowadzi od tautologii do tautologii).*

W zamian za to pokażemy dowód w drugą stronę: każda tautologia jest tezą. Załóżmy nie wprost, że A jest tautologią, ale nie jest tezą, czyli $\emptyset \models A$ oraz $\emptyset \not\vdash A$. Wówczas – na mocy lematu Lindenbauma-Assera – istnieje nadzbiór $L^A(\emptyset)$ o powyższych własnościach, m.in. $A \notin L^A(\emptyset)$. Określmy teraz wartościowanie:
$Val(B) = 1$, *gdy* $B \in L^A(\emptyset)$ *oraz*
$Val(B) = 0$, *gdy* $B \notin L^A(\emptyset)$.

Ponieważ nasze A jest takie właśnie, tj. $A \notin L^A(\emptyset)$, stąd wobec powyższego: $Val(A) = 0$, co znaczy, że A nie jest tautologią, co przeczy naszemy założeniu, że jest. Ta sprzeczność każe odrzucić nam zatem założenie, że nie jest tezą.

Niesprzeczność KRZ

Twierdzenie 3 *Klasyczny rachunek zadań jest niesprzeczny.*

Dowód 6 *Załóżmy, że KRZ nie jest niesprzeczny. Oznacza to, że istnieje taka formuła α, że zarówno: $\vdash \alpha$ oraz $\vdash \neg\alpha$. Z twierdzenia o pełności wynika, że obie formuły są tautologiami, czyli $h(\alpha) = 1$ oraz $h(\neg\alpha)$ = 1 dla każdego wartościowania. Ale to jest sprzeczne z jego definicją, zatem musimy odrzucić poczynione założenie (że KRZ nie jest niesprzeczny). Zatem istotnie jest niesprzeczny.*

Proste koniunkcje literałów: mintermy

Definicja 11 *Literał to dowolna formuła atomiczna p lub jej negacja $\neg p$.*

Definicja 12 *Niech $q_1, q_2, \ldots q_n$ będą literałami. Każda formula postaci:*

$$\phi = q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n$$

nazywana jest mintermem, prostą koniunkcją (prostą formułą) lub po prostu iloczynem prostym (iloczynem literałów).

Lemat 5 *Minterm jest formułą spełnialną wtw. gdy nie zawiera pary literałów komplementarnych.*

Dowód:
Od lewej do prawej: Niech dana będzie formuła $\phi = q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n$, która jest spełnialna, to oznacza, że istnieje taka interpretacja I, że $I(\phi) = 1$. Stąd dla tej interpretacji dla każdego q_i zachodzi $I(q_i) = 1$, co oznacza, że wszystkie literały są literałami pozytywnymi, zatem nie ma wśród nich pary literałów komplementarnych. Od prawej do lewej: Dowód nie wprost. Niech q_1 i $q_2 = \neg q_1$ oznaczają parę literałów komplementarnych. Stąd dla dowalnej interpretacji $I(q_1 \wedge q_2) = 0$. Sprzeczność.

Lemat 6 *Minterm jest formułą niespełnialną wtw. gdy zawiera parę literałów komplementarnych.*

Dowód: Analogiczny jak wyżej. Od lewej do prawej nie wrost. Zakładamy, że jest spełnialna. Oznaczenie: jeżeli

$$\phi = q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n$$

to

$$[\phi] = \{q_1, q_2, \ldots q_n\}$$

Definicja 13 *Minterm ϕ subsumuje minterm ψ (jest bardziej ogólny) wtw. $[\phi] \subseteq [\psi]$.*

Lemat 7 *Niech ϕ oraz ψ będą dowolnymi mitermami. Zachodzi:*

$$\psi \models \phi \qquad \textit{iff} \qquad [\phi] \subseteq [\psi].$$

Proste dysjunkcje literałów: maxtermy

Definicja 14 *Niech $q_1, q_2, \ldots q_n$ będą literałami. Każda formuła postaci:*

$$\phi = q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_n$$

nazywana jest maxtermem, prostą dysjunkcją lub zdaniem (ang. clause).

Lemat 8 *Maxterm jest formułą falsyfikowalną wtw. gdy nie zawiera pary literałów komplementarnych.*

Dowód:
Od lewej do prawej: Niech dana będzie formuła $\phi = q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n$, która jest falsifikowalna, to oznacza, że istnieje taka interpretacja I, że $I(\phi) = 0$. Stąd dla tej interpretacji dla każdego q_i zachodzi $I(q_i) = 0$, co oznacza, że wszystkie literały są literałami negatywnymi, zatem nie ma wśród nich pary literałów komplementarnych. Od prawej do lewej: Dowód nie wprost. Niech q_1 i $q_2 = \neg q_1$ oznaczają parę literałów komplementarnych. Stąd dla dowalnej interpretacji $I(q_1 \vee q_2) = 1$. Sprzeczność.

Lemat 9 *Maxterm jest tautologią wtw. gdy zawiera parę literałów komplementarnych.*

Dowód analogiczny jak wyżej, tylko od lewej do prawej nie wprost, zaś od prawej do lewej wprost.

Definicja 15 *Maxterm/zdanie ψ subsumuje maxterm/zdanie ϕ (jest bardziej specyficzny) wtw.*

$$[\psi] \subseteq [\phi]$$

Lemat 10 *Niech ϕ oraz ψ będą dowolnymi maxtermami/zdaniami. Zachodzi:*

$$\psi \models \phi \qquad \textit{iff} \qquad [\psi] \subseteq [\phi].$$

Rozważmy zdanie:

$$\psi = \neg p_1 \lor \neg p_2 \lor \ldots \lor \neg p_k \lor h_1 \lor h_2 \lor \ldots \lor h_m$$

Po zastosowaniu prawa de Morgana dostajemy

$$\neg(p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_k) \lor (h_1 \lor h_2 \lor \ldots \lor h_m)$$

co można przedstawić jako:

$$p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_k \Rightarrow h_1 \lor h_2 \lor \ldots \lor h_m$$

Definicja 16 *Zdanie postaci:*

$$\psi = \neg p_1 \lor \neg p_2 \lor \ldots \lor \neg p_k \lor h$$

nazywamy klauzulą Horna.

Alternatywna postać klauzuli Horna to:

$$p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_k \Rightarrow h.$$

W PROLOGU oraz w DATALOGU:

$$h : -p_1, p_2, \ldots, p_k.$$

a także:

```
h :- p_1, p_2,..., p_k.

h if p_1 and p_2 and ... and p_k.
```

Są zatem trzy mozliwości dla klauzuli Hornowskiej:

- zawiera tylko literały negatywne: $\{p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n\} \Rightarrow F$,
- zawiera dokładnie jeden literał pozytywny i zadnych negatywnych $T \Rightarrow h$

- Zawiera dokładnie jeden literał pozytywny oraz literały negatywne $\{p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n\} \Rightarrow h$

Wprowadziłam pojęcie klauzuli. Klauzulą formuły p nazywamy $\{p\}$, klauzulą formuły $\neg p$ nazywamy $\{\neg p\}$, Klauzulą formuły $\neg p \vee q$ nazywamy $\{\neg p, q\}$, klauzulą formuły $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ nazywamy $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, formuła $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ zapisana w postaci klauzulowej jest postaci $\{p_1\}, \{p_2\}, \ldots, \{p_n\}$.

PRZYKŁAD BAZY WIEDZY:

Baza wiedzy jest złożona z dwóch faktów i dwóch reguł. Baza została przedstawiona na trzy sposoby: w języku naturalnym, w rachunku predykatów oraz w postaci klauzul Horna.

1. Język naturalny
   - F1 Marcin i Teresa są mężem i żoną.
   - F2 Teresa mieszka w Krakowie.
   - R1 Jeżeli dwoje ludzi (X1,X2) są mężem i żoną to są małżeństwem.
   - R2 Jeżeli dwoje ludzi X3 i X4 są małżeństwem oraz X4 mieszka w X5, to X3 także mieszka w X5.
2. Rachunek predykatów
   - F1 mążIżona(Marcin,Teresa)
   - F2 mieszkaW(Teresa,Kraków)
   - R1 mążIżona(X1,X2) sąMałżeństwem(X1,X2)
   - R2 sąMałżeństwem(X3,X4) mieszkaW(X4,X5) mieszkaW(X3,X5).
3. Klauzule Horna
   - F1 mążIżona(marcin,teresa).

F2 mieszkaW(teresa,kraków).

R1 sąMałżeństwem(X1,X2) :- mążIżona(X1,X2).

R2 mieszkaW(X3,X5) :- sąMałżeństwem(X3,X4), mieszkaW(X4,X5).

CNF — Conjunctive Normal Form

Definicja 17 *Formuła Ψ jest w postaci normalnej koniunktywnej (CNF) wtw. gdy*

$$\Psi = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n$$

gdzie $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ są zdaniami. Notacja: $[\Psi] = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$.

Przykład:

Które z poniższych formuł są zapisane w postaci CNF:

1. $(p \vee g \vee \neg r) \wedge (p \vee r) \wedge \neg r$
2. $((p \wedge q) \vee \neg r) \wedge (p \vee r) \wedge \neg r$
3. $\neg(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge \neg r$

Definicja 18 *Implicent formuły — zdanie, które jeżeli przyjmuje wartość fałszu to ta formuła też przyjmuje wartość fałszu.*

Dlaczego koniunkcyjne postaci normalne są ważne?

Niech α jest CNF, wtedy jest postaci: $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$, a każda z formuł A_i jest alternatywą literałów, tzn.:

$A_i = L_i^1 \vee L_i^2 \vee \ldots \vee L_i^m$. Koniunkcja $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ jest tautologią KRZ $\iff$ gdy wszystkie formuły A_i są tautologiami.

Z kolei każda A_i (czyli fromuła $L_i^1 \vee L_i^2 \vee \ldots \vee L_i^m$(jest tautologią KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna spośród $L_i^1, L_i^2, \ldots, L_i^m$ jest tautologią.

Wniosek: Sprowadzenie do CNF dostarcza algorytmu na sprawdzenie tautologiczności!

Definicja 19 *Niech Ψ będzie formułą rachunku zdań, a P_{Ψ} niech oznacza wszystkie symbole formuł atomicznych występujące w Ψ. Zdaniem pełnym (maksymalnym) nazywamy zdanie ψ będące członem $CNF(\Psi)$ zawierające wszystkie symbole P_{Ψ}. Pełną/maksymalną postacią CNF formuły P_{Ψ} nazywamy formułę*

$$maxCNF(\Psi) = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n$$

gdzie wszystkie zdania $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ są maksymalne.

Definicja 20 *Formuła*

$$\Psi = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n$$

będąca w CNF jest minimalna wtw. gdy nie ma możliwości redukcji do postaci równoważnej o mniejszej liczbie zdań składowych.

Postać CNF dobrze nadaje się do badania niespełnialności; wystarczy wskazać niespełnialny podzbiór zdań zbioru $[\Psi]$.

Formuła zawsze fałszywa $\perp$ zawierająca n zmiennych zdaniowych może zostać przedstawiona w postaci CNF w jednoznaczny sposób i składa się ona z 2^n różnych dysjunkcji, każda o n składowych, np.:

$$\perp = pqr \wedge pq\bar{r} \wedge p\bar{q}r \wedge p\bar{q}\bar{r} \wedge \bar{p}qr \wedge \bar{p}q\bar{r} \wedge \bar{p}\bar{q}r \wedge \bar{p}\bar{q}\bar{r} \qquad \text{(CNF)}$$

Omówiłam szkic dowodu indykcyjnego.

DNF — Disjunctive Normal Form

Definicja 21 *Formuła Φ jest w postaci normalnej dysjunktywnej (DNF) wtw. gdy*

$$\Phi = \phi_1 \vee \phi_2 \vee \ldots \vee \phi_n$$

gdzie $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ są mintermami. Notacja: $[\Phi] = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$.

Przykład:
Które z poniższych formuł są zapisane w postaci DNF:

1. $(p \wedge q) \vee ((p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)))$
2. $(p \wedge q) \vee ((p \vee q) \vee \neg(p \wedge q)))$
3. $(p \wedge q) \vee ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)))$

Definicja 22 *Implikant formuły — iloczyn prosty, które jeżeli przyjmuje wartość prawdy to ta formuła też przyjmuje wartość prawdy.*

Definicja 23 *Niech Φ będzie formułą rachunku zdań, a P_Φ niech oznacza wszystkie symbole formuł atomicznych występujące w Φ. Iloczynem pełnym (maksymalnym) nazywamy zdanie ϕ będące członem $DNF(\Phi)$ zawierające wszystkie symbole P_Φ. Pełną/maksymalną postacią DNF formuły P_Φ nazywamy formułę*

$$maxDNF(\Phi) = \phi_1 \vee \phi_2 \vee \ldots \vee \phi_n$$

gdzie wszystkie iloczyny $\phi_1 \vee \phi_2 \vee \ldots \vee \phi_n$ są maksymalne.

Definicja 24 *Formuła*

$$\Phi = \phi_1 \vee \phi_2 \vee \ldots \vee \phi_n$$

będąca w DNF jest minimalna wtw. gdy nie ma możliwości redukcji do postaci równoważnej o mniejszej liczbie iloczynów składowych.

Postać DNF dobrze nadaje się do badania spełnialności; wystarczy wskazać spełnialny podzbiór iloczynów zbioru $[\Phi]$.

Formuła zawsze prawdziwa $\top$ zawierająca n zmiennych zdaniowych może zostać przedstawiona w postaci DNF w jednoznaczny sposób i składa się ona z 2^n różnych iloczynów, każdy o n składowych, np.:

$$\top = pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \qquad \text{(DNF)}$$

Dlaczego alternatywne postaci normalne są ważne?

Niech α jest DNF, wtedy jest postaci: $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \wedge A_n$, a każda z formuł A_i jest alternatywą literałów, tzn.:

$A_i = L_i^1 \vee L_i^2 \wedge \ldots \wedge L_i^m$. Alternatywa $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ jest kontrtautologią KRZ $\iff$ gdy wszystkie formuły A_i są kontrtautologiami.

Z kolei każda A_i (czyli fromuła $L_i^1 \wedge L_i^2 \wedge \ldots \wedge L_i^m$) jest kontrtautologią KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna spośród $L_i^1, L_i^2, \ldots, L_i^m$ jest kontrtautologią.

Wniosek: Sprowadzenie do DNF dostarcza algorytmu na sprawdzenie kontrtautologiczności!

CNF$\rightarrow$ TAUTOLOGIA, DNF$\rightarrow$ KONTRTAUTOLOGIA

Sprowadzanie do CNF/DNF

1. $\Phi \Leftrightarrow \Psi \equiv (\Phi \Rightarrow \Psi) \land (\Psi \Rightarrow \Phi)$ – eliminacja symboli równoważności,
2. $\Phi \Rightarrow \Psi \equiv \neg\Phi \lor \Psi$ – eliminacja symboli implikacji,
3. $\neg(\neg\Phi) \equiv \Phi$ – eliminacja zagnieżdżonych negacji,
4. $\neg(\Phi \lor \Psi) \equiv \neg\Phi \land \neg\Psi$ – zastosowanie prawa De Morgana do sprowadzania symbolu negacji bezpośrednio przed formułę atomową,
5. $\neg(\Phi \land \Psi) \equiv \neg\Phi \lor \neg\Psi$ – zastosowanie prawa De Morgana do sprowadzania symbolu negacji bezpośrednio przed formułę atomową,
6. $\Phi \lor (\Psi \land \Upsilon) \equiv (\Phi \lor \Psi) \land (\Phi \lor \Upsilon)$ – zastosowanie prawa rozdzielności alternatywy przy sprowadzaniu do CNF,
7. $\Phi \land (\Psi \lor \Upsilon) \equiv (\Phi \land \Psi) \lor (\Phi \land \Upsilon)$ – zastosowanie prawa rozdzielności koniunkcji przy sprowadzaniu do DNF.

Przykład:

$$
\begin{gathered}
(p \land (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q \equiv \neg(p \land (p \Rightarrow q)) \lor q \equiv \\
\neg(p \land (\neg p \lor q)) \lor q \equiv (\neg p \lor \neg(\neg p \lor q)) \lor q \equiv \\
(\neg p \lor (p \land \neg q)) \lor q \equiv \neg \mathbf{p} \lor (\mathbf{p} \land \neg \mathbf{q}) \lor \mathbf{q} \equiv \\
(\neg p \lor p) \land (\neg p \lor \neg q) \lor q \equiv \neg p \lor \neg q \lor q \equiv \neg p \lor \top \equiv \top.
\end{gathered}
$$

PRZYKŁADY:

Przekształcenia równoważne z postaci CNF do DNF

- $\phi = ((p \lor q) \land (p \lor r) \land (q \lor s) \land (r \lor s)), \quad \psi = ((p \land s) \lor (q \land r))$
- $\phi = ((p \lor q) \land (q \lor r) \land (r \lor p)), \quad \psi = ((p \land q) \lor (q \land r) \lor (r \land p))$
- $\phi = ((p \lor q \lor r) \land (q \lor r \lor s) \land (r \lor s \lor p)) \quad \psi = ((p \land q) \lor (p \land s) \lor (q \land s) \lor r).$

Dlaczego sprowadzanie do postaci normalnych jest ważne?

Lemat 11 *Dla każdej formuły* Φ *istnieje formuła* Ψ *taka, że* $\Phi \equiv \Psi$ *i* Ψ *jest postaci CNF.*

Dlaczego postacie CNF są ważne?

Jeśli formuła Φ jest tautologią i $\Phi \equiv \Psi$, to także Ψ jest tautologią.

Lemat 12 *Podobnie dla każdej formuły* Φ *istnieje formuła* Ψ *taka, że* $\Phi \equiv \Psi$ *i* Ψ *jest postaci DNF.*

Dlaczego postacie DNF są ważne?

Jeśli formuła Φ jest kontrtautologią i $\Phi \equiv \Psi$, to także Ψ jest kontrtautologią.

Przykład

Rozważmy ponownie przykład:

$$\phi = (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s),$$

$$\varphi = (p \vee r) \Rightarrow (q \vee s).$$

Należy sprawdzić czy za chodzi logiczna implikacja:

$$\phi \models \varphi.$$

Sprowadźmy ϕ do DNF:

$$\begin{aligned}\phi &= (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s) = \\ &= (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge s) \vee (q \wedge \neg r) \vee (q \wedge s).\end{aligned}$$

a następnie do postaci maksymalnej:

$$\begin{aligned}maxDNF(\phi) = &(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s)\vee \\ &(\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s)\vee \\ &(p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge s).\end{aligned}$$

Sprowadźmy także φ do DNF:

$$\begin{aligned}\varphi &= (p \vee r) \Rightarrow (q \vee s) = \neg(p \vee r) \vee q \vee s = (\neg p \wedge \neg r) \vee q \vee s = \\ &= (\neg p \wedge \neg r) \vee q \vee s.\end{aligned}$$

a następnie do postaci maksymalnej:

$$\begin{aligned}maxDNF(\varphi) = &(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s)\vee \\ &(\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s)\vee \\ &(\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s)\vee \\ &(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s)\vee \\ &(p \wedge \neg q \wedge r \wedge s).\end{aligned}$$

Teraz widać, że:

$$[maxDNF(\phi)] \subseteq [maxDNF(\varphi)],$$

NNF

Definicja 25 *Formuła Ψ jest w postaci normalnej NNF (ang. Negation Normal Form) wtw. gdy wszystkie symbole negacji występują bezpośrednio przed symbolami formuła atomicznych (zmiennych zdaniowych).*

Każda formuła w CNF jest w postaci NNF.

Każda formuła w DNF jest w postaci NNF.

Logiczna konsekwencja — podstawowe problemy logiki

Definicja 26 Logiczna konsekwencja *Formuła ψ jest logiczną konsekwencją formuły ϕ wtw. gdy dla każdej interpretacji I zachodzi*

$$\text{jeżeli} \qquad \models_I \phi \qquad \text{to} \qquad \models_I \psi. \tag{5}$$

Podstawowe problemy logiki:

- dowodzenie twierdzeń — badanie logicznej konsekwencji:

$$\Delta \models H,$$

- badanie spełnialności (SAT):

$$\text{Czy istnieje interpretacja } I: \ \models_I \Psi$$

- weryfikacja tautologii:

$$\text{Czy dla każdej interpretacji } I: \ \models_I \Psi$$

Dwa alternatywne podejścia:

- analiza możliwych interprtacji — metoda zero-jedynkowa; problem — eksplozja kombinatoryczna[2],
- wnioskowanie logiczne — wywód — za pomoca reguł logicznych zachowujących logiczną konsekwencję.

Notacja: jeżeli formuła H jest wywodliwa (wyprowadzalna) ze zbioru Δ, to zapiszemu to jako:

$$\Delta \vdash H$$

Problemy konstrukcji systemów logicznych:

$$\Delta \vdash H \qquad \text{versus} \qquad \Delta \models H$$

[2]Redukcja: drzewa decyzyjne, grafy OBDD, tablice semantyczne

Podstawowe definicje i własności — rekapitulacja

Definicja 27 *Formuła jest nazywana:*

- tautologią *wtw. gdy jest prawdziwa przy każdej interpretacji;*
- formułą falsyfikowalną *gdy nie jest tautologią,*
- formułą spełnialną *wtw. gdy istnieje taka interpretacja, przy której formuła ta jest prawdziwa;*
- formułą niespełnialną, formułą niespójną *lub* formułą sprzeczną *wtw. gdy przy każdej interpretacji fromuła ta jest fałszywa;*
- *fomuła* Ψ *jest* logiczną konsekwencją *formuły* Φ*, co notujemy* $\Phi \models \Psi$ *wtw. gdy dla każdej interpretacji przy której* Φ *jest prawdziwa również* Ψ *jest prawdziwa;*
- *formuła* Ψ *jest* wyprowadzalna *z formuły* Φ*, co notujemy* $\Phi \vdash \Psi$ *wtw. gdy istnieje ciąg reguł dowodzenia pozwalajacy uzyskać* Ψ *z* Φ*.*

Konsekwencje tych definicji:

- formuła jest tautologią wtw. gdy jej negacja jest niespełnialna (sprzeczna),
- formuła jest niespełnialna wtw. gdy jej negacja jest tautologią,
- formuła nie jest tautologią wtw. dla przynajmniej jednej inteerpretacji jest fałszywa,
- formuła jest niesprzeczna wtw. gdy dla przynajmniej jednej interpretacji jest prawdziwa,
- tautologia jest zawsze formułą spełnialną (ale nie odwrotnie),

- formuła niespełnialna jest formułą falsyfikowalną (ale nie odwrotnie).

Ważniejsze reguły wnioskowania

- $\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$ — reguła wprowadzania alternatywy,
- $\dfrac{\alpha,\ \beta}{\alpha \wedge \beta}$ — reguła wprowadzania koniunkcji,
- $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$ — reguła usuwania koniunkcji,
- $\dfrac{\alpha,\ \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$ — modus ponens (modus ponendo ponens),
- $\dfrac{\alpha \Rightarrow \beta,\ \neg\beta}{\neg\alpha}$ — modus tollens (modus tollendo tollens),
- $\dfrac{\alpha \vee \beta,\ \neg\alpha}{\beta}$ — modus tollendo ponens,
- $\dfrac{\alpha \bigoplus \beta,\ \alpha}{\neg\beta}$ — modus ponendo tollens,
- $\dfrac{\alpha \Rightarrow \beta,\ \beta \Rightarrow \gamma}{\alpha \Rightarrow \gamma}$ — reguła przechodniości,
- $\dfrac{\alpha \vee \gamma,\ \neg\gamma \vee \beta}{\alpha \vee \beta}$ — reguła rezolucji,
- $\dfrac{\alpha \wedge \gamma,\ \neg\gamma \wedge \beta}{\alpha \wedge \beta}$ — reguła dualna do rezolucji; (backward) dual resolution (works backwards), także *consolution*
- $\dfrac{\alpha \Rightarrow \beta,\ \gamma \Rightarrow \delta}{(\alpha \vee \gamma) \Rightarrow (\beta \vee \delta)}$ — prawo dylematu konstruktywnego,
- $\dfrac{\alpha \Rightarrow \beta,\ \gamma \Rightarrow \delta}{(\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow (\beta \wedge \delta)}$ — prawo dylematu konstruktywnego.

Reguły wnioskowania

- $\dfrac{\alpha,\ \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$ — Dzisiaj jest ostatni dzień kwietnia, a jesli dzisiaj jest ostati dzień kwietnia, to jutro rozpoczyna się długi weekend, a wiec jutro rozpoczyna się długi weekend.
- $\dfrac{\alpha \Rightarrow \beta,\ \neg\beta}{\neg\alpha}$ — Jeśli pada deszcz, to ulice będę mokre. Ulice są suche. Zatem nie padał deszcz.
- $\dfrac{\alpha \vee \beta,\ \neg\alpha}{\beta}$ — Bolek był na zebraniu w szkole u syna Jasia lub (nic nie mówiąc żonie) z kolegami w barze. Okazało się, że Bolek nie był na zebraniu. Zatem był z kolegami w barze.
- $\dfrac{\alpha \bigoplus \beta,\ \alpha}{\neg\beta}$ — Bolek nie był na zebraniu w szkole a był z kolegami w barze lub Bolek był na zebraniu w szkole a nie był z kolegami w barze. Okazało się, że Bolek był z kolegami w barze. Zatem nie był na zebraniu.
- $\dfrac{\alpha \Rightarrow \beta,\ \beta \Rightarrow \gamma}{\alpha \Rightarrow \gamma}$ — Jeśli przekształcenie ma trzy niewspółliniowe punkty stałe, to każdy punkt płaszczyzny jest punktem stałym tego przekształcenia, to przekształcenie jest tożsamosciowe, a wiec jeśli przekształcenie ma trzy niewspółliniowe punkty stałe, to jest to przekształcenie tożsamosciowe płaszczyzny.
- $\dfrac{\alpha \vee \gamma,\ \neg\gamma \vee \beta}{\alpha \vee \beta}$ — Prezesem firmy może zostać Bolek lub Lolek. Prezesem nie może zostać Lolek lub może jego żona. Zatem prezesem może zostać Bolek lub żona Lolka.

Twierdzenia o dedukcji

Twierdzenie 4 *Jeżeli* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ *są formułami logicznymi (nazywanymi aksjomatami), formuła* Ω *(nazywana hipotezą lub konkluzją) jest ich logiczną konsekwencją wtw. gdy formuła* $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \Rightarrow \Omega$ *jest tautologią.*

Twierdzenie 5 *Jeżeli* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ *są formułami logicznymi (nazywanymi aksjomatami), formuła* Ω *(nazywana hipotezą lub konkluzją) jest ich logiczną konsekwencją wtw. gdy formuła* $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \wedge \neg\Omega$ *jest sprzeczna.*

Problem dowodzenia twierdzeń ma postać: mając dane aksjomaty $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ uznane za prawdziwe wykazać prawdziwość hipotezy Ω. Tak więc należy wykazać, że:

$$\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \models \Omega$$

Metody dododzenia twierdzeń:

- sprawdzanie wszystkich możliwych interpretacji (wada: duża złożoność obliczeniowa),
- dowód wprost – korzystając z aksjomatów i reguł dowodzenia generujemy nowe formuły aż do uzyskania formuły Ω,
- dowodzenie tautologii – korzystając z Tw.1 dowodzimy, że formuła $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \Rightarrow \Omega$ jest tautologią,
- dowód nie wprost – to dowód twierdzenia przeciwstawnego, równoważnego danemu. Polega na dowodzeniu twierdzenia postaci $\neg\Omega \Rightarrow \neg(\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n)$.
- dowód przez sprowadzenie do sprzeczności; korzystają z Tw.2, polega na wykazaniu sprzeczności formuły: $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \wedge \neg\Omega$.

Przykłady metod dowodzenia

Dowód wprost: $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge (\neg r \vee \neg s) \models (\neg p \vee \neg q)$:

1. $p \Rightarrow r$ założenie
2. $q \Rightarrow s$ założenie
3. $\neg r \vee \neg s$ założenie
4. $s \Rightarrow \neg r$ 3. zasada eliminacji implikacji (EI)
5. $q \Rightarrow \neg r$ 2. i 4. reguła przechodniości
6. $\neg p \vee r$ 1. EI
7. $\neg q \vee \neg r$ 5. EI
8. $\neg p \vee \neg q$ 6. i 7. z reguły rezolucji

Dowodzenie tautologii: $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \models [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$.
Przekształcamy w formułę $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ i korzystając z zasady eliminacji implikacji otrzymujemy formułę postaci $\alpha \vee \neg\alpha$.

Dowód nie wprost: $p \models \neg q \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)$

1. $\neg(\neg q \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q))$ założenie
2. $\neg(q \vee \neg(p \Rightarrow q))$ zasada eliminacji implikacji
3. $(\neg q \wedge (p \Rightarrow q))$ z prawa De Morgana
4. $\neg q$ 3. zasada usuwania koniunkcji
5. $p \Rightarrow q$ 3. zasada usuwania koniunkcji
6. $\neg p \vee q$ 5. EI

7. $q \vee \neg p$ 6. przemienność alternatywy

8. $\neg p$ 4. i 7. Modus tollendo ponens

Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności: $(p \vee q) \wedge \neg p \models q$

1. $p \vee q$ założenie

2. $\neg p$ założenie

3. $\neg q$ założenie

4. q 1. i 2. Modus tollendo ponens

5. $\perp$ 3. i 4.

Przykład: badanie logicznej konsekwencji

$$\frac{(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)}{(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)}$$

Kładąc:

$$\phi = (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$$

oraz

$$\varphi = (p \vee r) \Rightarrow (q \vee s),$$

należy sprawdzić czy:

$$\phi \models \varphi. \quad (6)$$

p	q	r	s	$p \Rightarrow q$	$r \Rightarrow s$	$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$	$p \vee r$	$q \vee s$	$(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$
0	0	0	0	1	1	**1**	0	0	**1**
0	0	0	1	1	1	**1**	0	1	**1**
0	0	1	0	1	0	**0**	1	0	**0**
0	0	1	1	1	1	**1**	1	1	**1**
0	1	0	0	1	1	**1**	0	1	**1**
0	1	0	1	1	1	**1**	0	1	**1**
0	1	1	0	1	0	**0**	1	1	**1**
0	1	1	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	0	0	0	0	1	**0**	1	0	**0**
1	0	0	1	0	1	**0**	1	1	**1**
1	0	1	0	0	0	**0**	1	0	**0**
1	0	1	1	0	1	**0**	1	1	**1**
1	1	0	0	1	1	**1**	1	1	**1**
1	1	0	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	1	1	0	1	0	**0**	1	1	**1**
1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	**1**

Z analizy kolumn 7 i 10 wynika, że zachodzi relacja logicznej konsekwencji (brak logicznej równoważności — 7, 10, 12 i 15).

Metoda rezolucji

1. Problem:
$$\Delta \models H$$
2. Z twierdzenia o dedukcji (2) — należy wykazać, że
$$\Delta \cup \neg H$$
jest niespełnialny.
3. Dokonać transformacji $\Delta \cup \neg H$ do postaci CNF.
4. Wykorzystując regułę rezolucji wyprowadzić zdanie puste - zawsze fałszywe.

Przykład:

1. Problem:
$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \models (p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$$
2. Z twierdzenia o dedukcji (2) — należy wykazać, że
$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \cup \neg[(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)]$$
jest niespełnialny.
3. Dokonać transformacji do postaci CNF. Mamy:
$$\{\neg p \vee q, \neg r \vee s, p \vee r, \neg q, \neg s\}$$
4. Wykorzystując regułę rezolucji wyprowadzić zdanie puste - zawsze fałszywe.

Metoda rezolucji dualnej

1. Problem:
$$\Delta \models H$$
2. Z twierdzenia o dedukcji (1) — należy wykazać, że
$$\Delta \Rightarrow H$$
jest tautologią.
3. Dokonać transformacji $\Delta \Rightarrow H$ do postaci DNF.
4. Wykorzystując regułę rezolucji dualnej wyprowadzić zdanie puste - zawsze zawsze prawdziwe.

Przykład:

1. Problem:
$$(p \Rightarrow q) \land (r \Rightarrow s) \models (p \lor r) \Rightarrow (q \lor s)$$
2. Z twierdzenia o dedukcji (1) — należy wykazać, że
$$[(p \Rightarrow q) \land (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \lor r) \Rightarrow (q \lor s)]$$
jest tautologią.
3. Dokonać transformacji do postaci DNF. Mamy:
$$\{p \land \neg q, r \land \neg s, \neg p \land \neg r, q, s\}$$
4. Wykorzystując regułę rezolucji dualnej wyprowadzić zdanie puste - zawsze prawdziwe.

Przykład aksjomatyzacji i wywodu

A – pojawił się sygnał do procesu,

P – sygnał został dodany do zbioru sygnałów oczekujących na odebranie przez proces,

B – sygnał jest zablokowany przez proces,

D – sygnał został dostarczony do procesu (i odebrany),

S – stan procesu jest zachowany,

M – maska sygnałów jest obliczana,

H - procedura obsługi sygnałów jest wywołana,

N – procedura obsługi jest wywołana w zwykły sposób,

R – proces wznawia wykonanie w poprzednim kontekście,

I – proces musi sam odtworzyć poprzedni kontekst.

Dane są reguły:

$A \longrightarrow P$,

$P \wedge \neg B \longrightarrow D$,

$D \longrightarrow S \wedge M \wedge H$,

$H \wedge N \longrightarrow R$,

$H \wedge \neg R \longrightarrow I$,

Konkluzje:

P, D, S, M, H, I, $\neg N$.

Dane są fakty:

A, $\neg B$, $\neg R$

Zastosowanie rezolucji — CNF:

$$\{\neg A \vee P, \neg P \vee B \vee D, \neg D \vee S, \neg D \vee M, \neg D \vee H, \neg H \vee \neg N \vee R, \neg H \vee R \vee I, A, \neg B, \neg R\}$$

Krok wnioskowania, wywód

Krok wnioskowania: jednokrotne zastosowanie dowolnej reguły wnioskowania w celu produkcji konkluzji.

Przykład:

Zastosowanie reguły rezolucji:

$$\frac{\phi \vee \neg p, p \vee \psi}{\phi \vee \psi}$$

Piszemy: $\{\phi \vee \neg p, p \vee \psi\} \vdash_R \phi \vee \psi$

Definicja 28 Wywód *Wywodem formuły ϕ ze zbioru formuł Δ nazwywamy ciąg formuł*

$$\phi_1, \phi_2 \ldots \phi_k$$

taki, że:

- *formuła ϕ_1 jest wyprowadzalna z Δ (w pojedynczym kroku wnioskowania):*

$$\Delta \vdash \phi_1,$$

- *każda następna formuła jest wyprowadzalna ze zbioru Δ i uprzednio wygenerowanych formuł (w pojedynczym kroku wnioskowania):*

$$\{\Delta, \phi 1, \phi_2, \ldots, \phi_i\} \vdash \phi_{i+1}$$

  dla $i = 2, 3, \ldots, k-1$,

- *ϕ jest ostatnią formułą wygenerowanego ciągu, tzn.:*

$$\phi = \phi_k$$

Piszemy: $\Delta \vdash \phi$, a formułę ϕ nazywamy wywodliwą z Δ.

Aksjomatyka KRZ

1. Ax. 1. $p \to (q \to p)$ Prawo Fregego
2. Ax.2. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ Prawo sylogizmu
3. Ax.3. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ Prawo transpozycji
4. Ax. 4. $\neg\neg p \to p$ Prawo podwójnego przeczenia
5. Ax. 5. $p \to \neg\neg p$ Odwrotnie prawo podwójnego przeczenia
6. Ax. 6. $p \wedge q \to p$ Prawo symplifikacji
7. Ax. 7. $p \wedge q \to q$ Drugie prawo symplifkacji
8. Ax. 8. $(p \to q) \to (p \to r) \to (p \to q \wedge r))$ Prawo mnoż. następników
9. Ax. 9. $p \to p \vee q$ Prawo addycji
10. Ax. 10. $q \to p \vee q$ Drugie prawo addycji
11. Ax. 11. $(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q \to r))$ Prawo dod. poprz.
12. Ax. 12. $(p \iff q) \to (p \to q)$ Aksjomaty równoważności
13. Ax. 13. $(p \iff q) \to (q \to p)$
14. Ax. 14. $(p \to q) \to ((q \to p) \to (p \iff q))$

Dowody KRZ metodą aksjomatyczną

Lemat 13 $(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to r)$ *prawo importacji*

Wytyczna, cel dowodu: Należy pokazać, że z założeń: $(p \to (q \to r))$ oraz $(p \wedge q)$ otrzymamy r.

1. $(p \to (q \to r))$ — Założenie 1.
2. $(p \wedge q)$ — Założenie 2.
3. p — 2, Odrywanie koniunkcji
4. q — 3, Odrywanie koniunkcji
5. $q \to r$ — 4, 1, Modus Ponens

Lemat 14 $p \iff p$

1. $p \to p$ — teza 1.
2. $(p \to q) \to ((q \to p) \to (p \iff q))$ — Aksjomat 14.
3. $(p \to p) \to ((p \to p) \to (p \to p))$ — [Reguła Podst.: q/p]
4. $(p \to p) \to (p \to p)$ — 3, 1, Modus Ponens
5. $p \to p$ — 4, 1, Modus Ponens

Dowody KRZ metodą aksjomatyczną

Lemat 15 $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ *sylogizm hipotetyczny/przechodniość implikacji*

Wytyczna: cel dowodu: Należy pokazać, że z założeń: $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$, $(p \rightarrow q)$ oraz p uzyskamy r.

1. $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$	założenie
2. $(p \rightarrow q)$	założenie
3. p	założenie
4. $q \rightarrow r$	1, MP
5. q	2,3 MP
6. r	4, 5 MP

Dowody KRZ metodą aksjomatyczną

Lemat 16 $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ *II prawo Fregego*

Wytyczna: Należy pokazać, że z założeń: $(p \to (q \to r))$, $p \to q$ oraz p otrzymamy r.

1. $(p \to (q \to r))$	założenie
2. $p \to q$	założenie
3. p	założenie
4. $q \to r$	MP, 3, 1
5. q	2, 3 MP
6. r	4,5 MP

Dowody KRZ metodą aksjomatyczną

Lemat 17 $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r)))$ Ax. 8
2. $(p \wedge q \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow (q \wedge r)))$ $p/p \wedge q$ Ax. 8
3. $p \wedge q \rightarrow q$ Ax. 7
4. $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow (q \wedge r))$ 2,3, MP
5. $(p \wedge q \rightarrow p) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow (q \wedge p))$ 4, r/p
6. $p \wedge q \rightarrow p$ Ax. 6
7. $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$ 5,6 MP

Zbiór logicznych konsekwencji

Definicja 29 *Niech Δ będzie zbiorem formuł (koniunkcją). Zbiorem logicznych konsekwencji nazywamy zbiór*

$$Cn(\Delta) = \{\phi \colon \Delta \vdash \phi\}$$

gdzie każda formuła ϕ jest zbudowana jedynie w oparciu o symbole propozycjonalne Δ.

Lemat 18 Własności zbioru konsekwencji *Zbiór logicznych konsekwencji $Cn(\Delta)$ ma następujące własności:*

- $\Delta \subseteq Cn(\Delta)$,
- *monotoniczność — jeżeli $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$, to:*

$$Cn(\Delta_1) \subseteq Cn(\Delta_2)$$

- $Cn(Cn(\Delta)) = Cn(\Delta)$ *(punkt stały).*

Definicja 30 *KRZ możemy zdefiniować następująco: KRZ = Cn(Ax). Klasyczny rachunek zdań jest zamknięty na branie konsekwencji logicznych swoich aksjomatów.*

Twierdzenie 6 *KRZ jest zupełny, tzw. dla każdej formuły ϕ KRZ istnieje efektywna metoda sprawdzenia, czy $\vdash \phi$ albo $\not\vdash \phi$.*

Dowód 7 *(**Zupełność**) Wiadomo, że tautologiczność formuł KRZ można sprawdzić efektywnie jedną z metod (np. zero-jedynkową), aksjomatyczną. Na mocy twierdzenia o pełności wynika stąd, że istnieje też metoda sprawdzenia, czy $\vdash \phi$ albo $\not\vdash \phi$.*

Twierdzenie 7 *(**Zwartość**) Zbiór formuł Δ KRZ jest spełnialny $\Longleftrightarrow$ każdy skończony podzbiór $\Delta^{Fin} \subseteq \Delta$ jest spełnialny.*

Dowód 8 *Dowód "$\Rightarrow$"(tzn. Δ jest spełnialna, to każda Δ^{Fin} jest spełnialna) jest oczywisty (dlazcego?), zatem go pominiemy.*

Udowodnimy fakt, że jeśli każda Δ^{Fin} jest spełnialna, to także sama Δ jest spełnialna. Załóżmy zatem nie wprost, że Δ nie jest spełnialna. Na mocy twierdzenia o pełności jest on sprzeczny, czyli istnieje dowód (jakigoś) zdania sprzecznego na gruncie pewnego skończonego podzbioru $\Delta_0 \subseteq \Delta$ (skończoność Δ_0 wynika ze skończoności dowodu.) Znów na mocy pełności (wystarczy "w jedną stronę") jest on niespełnialny, co dowodzi tezy.