

Zbiory, funkcje, relacje.

Zbiory rozmyte i przybliżone

Zbiory

Pojęcia „zbiór” i „należenie” są pojęciami pierwotnymi (podstawowymi, niezdefiniowanymi). Zbiory zazwyczaj oznacza się wielkimi literami, a należący do nich obiekty – małymi. Zapis $a \in A$ oznacza, że a jest *elementem* zbioru A , natomiast $a \notin A$, że a nie należy do zbioru A .

Istnieją dwa podstawowe sposoby określania zbioru.

1. Sporządzenie listy elementów zbioru w nawiasach klamrowych:
 - a) zbiory skończone: $\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $\{1, 3, \{5, 7\}\}$, $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$,
 - b) zbiory nieskończone: $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$.
2. Opis własności elementów zbioru (warunku):
 $\{x : x \text{ jest liczbą naturalną i } x \text{ jest podzielne przez } 2\}$, $\{x : x \text{ jest studentem pierwszego roku}\}$.

Dwa zbiory są *równe* (identyczne), jeśli mają dokładnie te same elementy:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Zbiór A zawiera się w zbiorze B wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A jest też elementem zbioru B :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Zawieranie się zbiorów jest również nazywane *inkluzją*.

Zbiór A jest *podzbiorem* zbioru $B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

Wynika z tego, że każdy zbiór jest swoim podzbiorem, gdyż $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in A)$

Dodatkowo dwa zbiory są równe $\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

Inkluzja właściwa: $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge \neg (A = B)$

Zbiór A jest *podzbiorem właściwym* zbioru $B \Leftrightarrow A \subset B$.

Wniosek: jeżeli $A \subset B$, to $\exists x (x \in B \wedge \neg (x \in A))$.

Zbiór pusty to zbiór, który nie ma żadnego elementu. Oznaczany jest symbolem \emptyset . Przyjmuje się, że zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru.

Zbiory A i B są *rozłączne* $\Leftrightarrow \neg \exists x (x \in A \wedge x \in B)$.

Zbiór zbiorów (tj. zbiór, którego elementami są zbiory) nazywamy *rodziną zbiorów*.

Rodzinę wszystkich podzbiorów danego zbioru A nazywamy *zbiorem potęgowym* zbioru A i oznaczamy symbolem 2^A .

Przykładowo jeśli $A = \{1, 2, 3\}$, to $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Jeżeli zbiór A jest skończony i ma n elementów, to zbiór 2^A ma 2^n elementów.

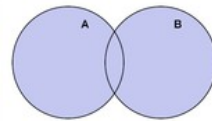
Zbiór A jest *przeliczalny* \Leftrightarrow zbiór A jest skończony lub zbiór A jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

Działania na zbiorach

Dane są dowolne dwa podzbiory A oraz B zbioru U nazywanego przestrzenią lub uniwersum.

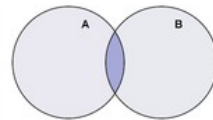
- *Suma* $A \cup B$ to zbiór elementów, które należą do choć jednego ze zbiorów A lub B

$$A \cup B = \{x \in U: x \in A \vee x \in B\}$$



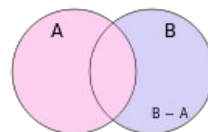
- *Iloczyn* (przecięcie, część wspólna) $A \cap B$ to zbiór elementów, które należą jednocześnie do obu zbiorów A oraz B

$$A \cap B = \{x \in U: x \in A \wedge x \in B\}$$



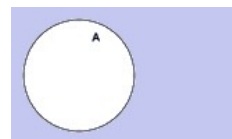
- *Różnica* $A \setminus B$ to zbiór elementów, które należą do zbioru A , ale nie należą do zbioru B

$$A \setminus B = \{x \in U: x \in A \wedge x \notin B\}$$



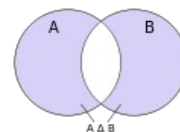
- *Dopełnienie* A' to zbiór elementów, które nie należą do A

$$A' = \{x \in U: x \notin A\} = U \setminus A$$



- *Różnica symetryczna* $A \Delta B$ to zbiór elementów, które należą do jednego i tylko jednego ze zbiorów A oraz B

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Własności

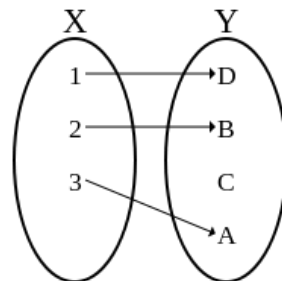
- łączność sumy i iloczynu
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- przemienność sumy i iloczynu
 $A \cup B = B \cup A$
 $A \cap B = B \cap A$
- rozdzielność sumy względem iloczynu i iloczynu względem sumy
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- I i II prawo de Morgana
 $(A \cup B)' = A' \cap B'$
 $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- własności dopełnienia
 $A \cup U = U$
 $A \cap U = A$
 $(A')' = A$

Funkcje

Funkcją $f: X \rightarrow Y$ będziemy nazywać przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru X dokładnie jednego elementu zbioru Y . Zbiór X nazywa się dziedziną funkcji (zbiorem argumentów), a zbiór Y to przeciwdziedzina funkcji (zbiór wartości).

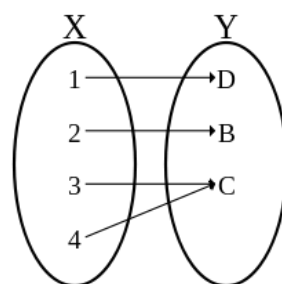
Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest nazywana *iniekcją*, tj. *funkcją różnowartościową* wtedy, gdy:

$$\forall x_1, x_2 \in X \wedge f: X \rightarrow Y: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



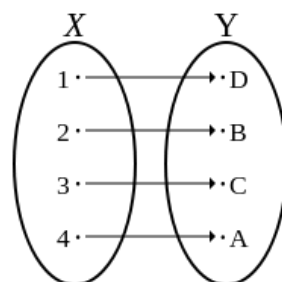
Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest nazywana *suriekcją*, tj. *funkcją „na”* wtedy, gdy:

$$\forall y \in Y \wedge f: X \rightarrow Y \exists x \in X: f(x) = y$$



Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest nazywana *bijekcją*, tj. funkcją wzajemnie jednoznaczną wtedy, gdy:

$$\forall x \in X \exists! y \in Y: (x, y) \in f \wedge \forall y \in Y \exists! x \in X: (x, y) \in f$$



Złożeniem funkcji $f: X \rightarrow Y$ oraz $g: Y \rightarrow Z$ nazywamy funkcję $h: X \rightarrow Z$, taką że

$$h(x) = g(f(x)) = g \circ f$$

Funkcje f i g nazywa się *funkcjami składanymi*, zaś h nosi nazwę *funkcji złożonej*.

Jeżeli $f: X \rightarrow X$, to można wykonać złożenie f samej ze sobą – otrzymaną funkcję $f \circ f$ oznacza się zazwyczaj f^2 . Takie wielokrotne składanie nazywa się *iteracją*.

Dla każdej funkcji wzajemnie jednoznacznej (bijekcji, czyli jednocześnie iniekcji i suriekcji) można określić funkcję $f^{-1}: Y \rightarrow X$, taką że $(f \circ f^{-1})(x) = x$. Nazywa się ona wówczas *funkcją odwrotną*.

Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest *odwracalna* w Y , gdy istnieje funkcja $g: Y \rightarrow X$, taka że:

- $g(f(x)) = x$ dla każdego $x \in X$
- $f(g(y)) = y$ dla każdego $y \in Y$

Funkcja, która ma funkcję odwrotną równą jej samej (czyli złożona sama ze sobą jest tożsamością), nazywa się *inwolucją*.

Relacje

Intuicyjnie, *relacja* oznacza pewien związek zachodzący pomiędzy dwoma lub więcej elementami, inaczej – pewną własność spełnianą przez te elementy. Tak rozumiane relacje można definiować na dwa sposoby: *ekstensjonalnie*, tzn. poprzez wyliczenie wszystkich krotek (k -elementowych ciągów) tworzących tę relację oraz *intensjonalnie*, tzn. poprzez podanie warunku, który muszą spełniać elementy relacji, zazwyczaj podając równocześnie uniwersum.

Relacja może mieć dowolną całkowitą, nieujemną liczbę argumentów. Relacjami najczęściej rozważanymi w matematyce są relacje dwuargumentowe (dwuczłonowe) stanowiące klasę relacji, dla których zdefiniowano szereg istotnych własności i znajdujących szerokie zastosowanie.

Relacje dwuargumentowe

Iloczynem kartezjańskim $X \times Y$ (dowolnych) zbiorów X oraz Y nazywamy zbiór wszystkich par postaci (x, y) , takich że $x \in X$ i $y \in Y$; formalnie

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$$

Niech X oraz Y będą dowolnymi zbiorami. *Relacją dwuargumentową (binarną, dwuczłonową)* nazywamy każdy zbiór R będący podzbiorem iloczynu kartezjańskiego tych zbiorów.

$$R \subset X \times Y$$

Stosowana notacja: $(x, y) \in R$ (para (x, y) należy do relacji R) lub $x R y$ (x jest w relacji R z y).

Dziedzina i przeciwdziedzina relacji

Zbiór

$$D(R) = \{x : \exists y (x, y) \in R\}$$

nazywany jest dziedziną relacji R , a zbiór

$$D'(R) = \{y : \exists x (x, y) \in R\}$$

nazywany jest przeciwdziedziną relacji R .

Własności relacji dwuargumentowych

Będziemy rozważać relacje określone w pewnym zbiorze X (typu $R \subseteq X \times X$).

Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy *zwrotną*, jeżeli spełnia ona następujący warunek:

$$\forall x \in X (x, x) \in R$$

Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy *przeciwzwrotną*, jeżeli spełnia ona następujący warunek:

$$\forall x \in X (x, x) \notin R$$

Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy *symetryczną*, jeżeli spełnia ona następujący warunek:

$$\forall x, y \in X (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy *asymetryczną*, jeżeli spełnia ona następujący warunek:

$$\forall x, y \in X (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$$

Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy *antysymetryczną*, jeżeli spełnia ona następujący warunek:

$$\forall x, y \in X (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$$

Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy *przechodnią* lub *tranzytywną*, jeżeli spełnia ona następujący warunek:

$$\forall x, y, z \in X (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

Zbiory rozmyte i przybliżone

Zbiory rozmyte

Zbiór rozmyty jest to zbiór par w niepustej przestrzeni X , w których pierwszy element x należy do zbioru X , natomiast drugi (funkcja przynależności) opisuje jego stopień przynależności do zbioru rozmytego A .

$$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\}$$

Stopień przynależności jest liczbą rzeczywistą z przedziału $[0,1]$. Możemy wyróżnić 3 przypadki:

1. $\mu_A(x) = 1$ oznacza pełną przynależność elementu x do zbioru rozmytego A , tzn. $x \in A$,
2. $\mu_A(x) = 0$ oznacza brak przynależności elementu x do zbioru rozmytego A , tzn. $x \notin A$,
3. $0 < \mu_A(x) < 1$ oznacza częściową przynależność elementu x do zbioru rozmytego A .

Czasami do niektórych zastosowań używa się standardowych postaci funkcji przynależności. Należą do nich m. in. funkcje: singleton, gaussowska, typu dzwonowego.

Symboliczny zapis zbiorów rozmytych ma następującą postać:

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

Poszczególnym elementom x_1, \dots, x_n przyporządkowane są stopnie przynależności do zbioru.

Ze zbiorem rozmytym wiążą się następujące pojęcia i definicje:

- *nośnik* (support) zbioru rozmytego A – zbiór elementów przestrzeni X , których wartość funkcji przynależności jest większa od 0
 $\text{supp}(A) = \{x \in X; \mu_A(x) > 0\}$
- *rdzeń* (core) zbioru rozmytego A – zbiór elementów przestrzeni X , których wartość funkcji przynależności jest równa 1
 $\text{core}(A) = \{x \in X; \mu_A(x) = 1\}$
- *wysokość* (height) zbioru rozmytego A – największa wartość funkcji przynależności
 $h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$
- *normalny zbiór rozmyty* – zbiór rozmyty spełniający warunek $h(A) = 1$.
Jeśli zbiór rozmyty nie jest normalny, można go znormalizować za pomocą przekształcenia

$$\mu_{A_{\text{norm}}}(x) = \frac{\mu_A(x)}{h(A)}, \text{ gdzie } h(A) \text{ jest wysokością zbioru}$$

- *pusty zbiór rozmyty* (zapis $A = \emptyset$) – zbiór spełniający warunek $\mu_A(x) = 0$ dla każdego $x \in X$
- α -*przekrój zbioru rozmytego* (zapis A_α) – zbiór spełniający warunek $A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$
- zbiór rozmyty A zawiera się w zbiorze rozmytym B (zapis $A \subset B$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ dla każdego $x \in X$
- zbiór rozmyty A jest równy zbiorowi rozmytemu B (zapis $A = B$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ dla każdego $x \in X$

Na zbiorach rozmytych można przeprowadzać operacje takie jak przecięcie, iloczyn kartezjański, sumę i dopełnienie.

Relacją rozmytą między dwoma niepustymi zbiorami X i Y nazywamy zbiór rozmyty określony na iloczynie kartezjańskim $X \times Y$. Innymi słowy, relacja rozmyta jest zbiorem par: $R = \{(x, y), \mu_R(x, y)\}$, gdzie $\mu_R : X \times Y \rightarrow [0, 1]$ jest funkcją przynależności.

Zbiory rozmyte typu 2

W przypadku zbiorów rozmytych typu 1 stopień przynależności jest liczbą rzeczywistą przyjmującą wartości w przedziale $[0,1]$. Według koncepcji zbiorów rozmytych typu 2, funkcja przynależności nie jest już liczbą, lecz ma charakter rozmyty i dla dowolnego ustalonego elementu x nie można mówić o jednoznacznie określonej wartości funkcji przynależności.

Wyostrażanie zbiorów rozmytych typu 2 składa się z dwóch etapów. Najpierw należy dokonać tzw. *redukcji typu*, która polega na przekształceniu zbioru rozmytego typu 2 w zbiór rozmyty typu 1. Otrzymany w ten sposób zbiór rozmyty typu 1, nazywany *centroidem*, może być wyostrażony do wartości nierozmytej.

Zbiory przybliżone

W klasycznej teorii mnogości zbiór jest jednoznacznie określony przez jego elementy. Oznacza to, że każdy element jest określony jako należący do zbioru lub nie. Z pojęciem zbioru przybliżonego powiązana jest niejasność. Istnieją pojęcia niedające się jednoznacznie sklasyfikować. Często nie można rozstrzygnąć, do jakiej klasy należy rozpatrywany obiekt.

Teoria zbiorów przybliżonych opiera się na założeniu, że z każdym obiektem powiązane są pewne informacje (dane, wiedza). Przykładowo, jeśli obiektami są pacjenci cierpiący na różne choroby, to informacjami będą symptomy chorób.

System informacyjny to para $A = (U, A)$ niepustych, skończonych zbiorów U i A , gdzie U jest zbiorem obiektów (uniwersum), natomiast A – zbiorem składającym się z z atrybutów. Dowolny system informacyjny może być reprezentowany przez tabelę danych, której kolumny to poszczególne atrybuty, a każdy wiersz to jeden obiekt.

Nierozróżnialność

Obiekty x i y są nierozróżnialne, jeśli są opisane takimi samymi atrybutami (dla każdego atrybutu posiadają jednakowe wartości). Mówimy wtedy, że obiekty są w relacji nierozróżnialności.

Relacja *B-nierozróżnialności* (określona przez dowolny podzbiór B zbioru A) to relacja $I(B)$ na przestrzeni U spełniająca zależność

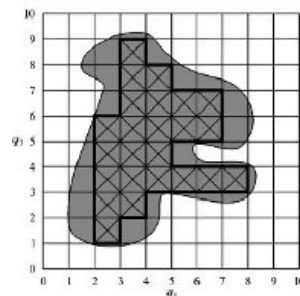
$$x I(B) y \iff a(x) = a(y) \forall a \in B$$

w której $a(x)$ oznacza wartość atrybutu a dla obiektu x . Jeżeli $(x, y) \in I(B)$ oznacza to, że x i y są B -nierozróżnialne. Relacja nierozróżnialności wyraża fakt, że posiadana wiedza nie jest wystarczająca do precyzyjnego sklasyfikowania pewnych obiektów. Z tego powodu konieczny jest podział na klasy (klastry) nierozróżnialnych elementów. Relacja równoważności dzieli zbiór, w którym jest określona, na rodzinę rozłącznych zbiorów zwanych *klasami abstrakcji*.

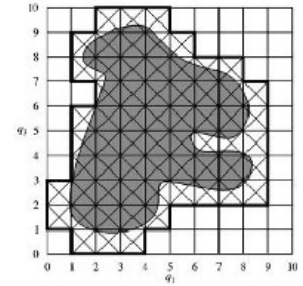
Aproksymacja zbioru

Aproksymacje są dwiema podstawowymi operacjami w teorii zbiorów przybliżonych.

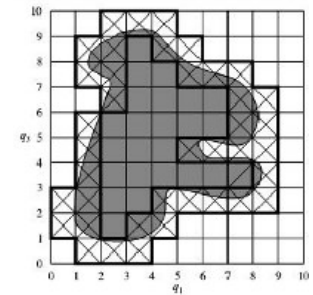
- *B-dolna aproksymacja* zbioru X – zbiór obiektów, które na pewno są elementami zbioru X
 $B_-(X) = \{x \in U : B(x) \subseteq X\}$



- *B-górna aproksymacja* zbioru X – zbiór wszystkich obiektów oprócz tych, które na pewno nie są elementami zbioru X
 $B^*(X) = \{x \in U : B(x) \cap X \neq \emptyset\}$



- *B-brzegowy obszar* zbioru X – zbiór obiektów, które nie mogą być sklasyfikowane ani jako przynależne do X , ani do jego dopełnienia
 $BN_B(X) = B^*(X) - B_*(X)$



Innymi słowy, z każdym zbiorem przybliżonym można powiązać dwa zbiory dokładne, nazywane górną i dolną aproksymacją, przy czym $B_*(X) \subseteq X \subseteq B^*(X)$. Niejasność w zbiorach przybliżonych wyrażana jest nie poprzez przynależność, ale przez obszar brzegowy.

Zbiór B-dokładny to zbiór, w którym zachodzi równość dolnej i górnej aproksymacji: $B^*(X) = B_*(X)$, czyli jego obszar brzegowy jest pustym: $BN_B(X) = \emptyset$

Zbiór B-przybliżony to zbiór, w którym dolna aproksymacja jest różna od górnej: $B^*(X) \neq B_*(X)$, czyli obszar brzegowy nie jest zbiorem pustym: $BN_B(X) \neq \emptyset$